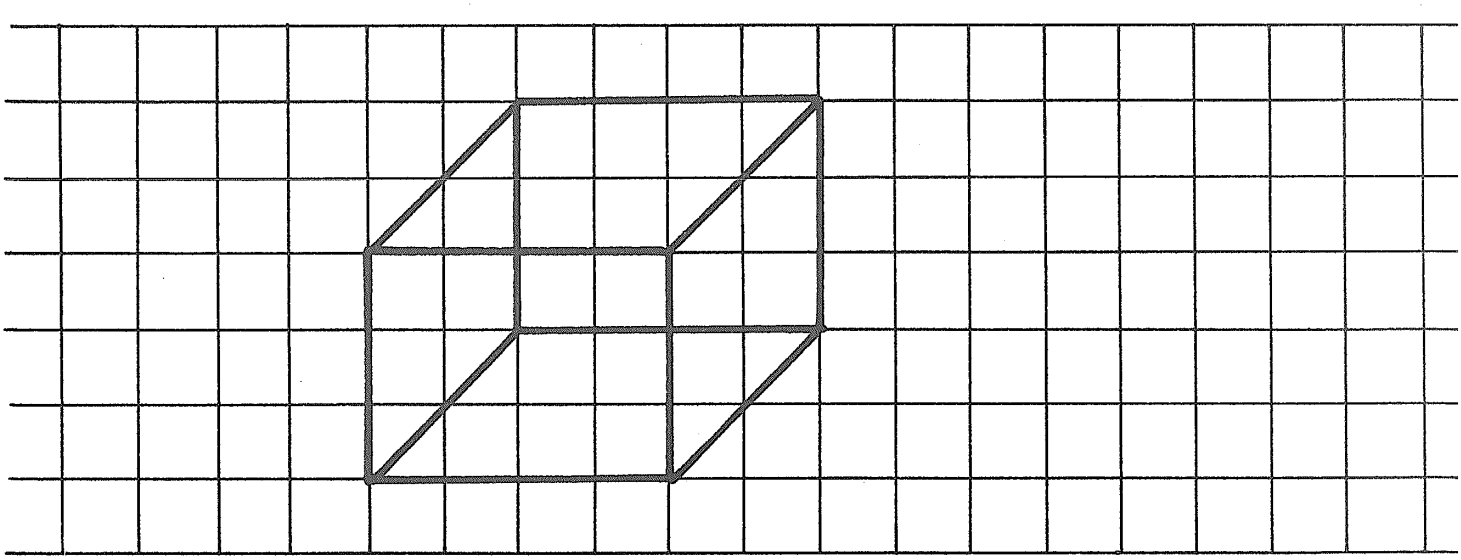
# CUERPOS GEOMÉTRICOS

Obras que integran el bloque 4 *(Geometría euclidiana)*:

1. Conjuntos de puntos
2. Relaciones binarias
3. Figuras planas
4. El aparato demostrativo. Ángulos y triángulos
5. Polígonos convexos
6. Relación de semejanza
7. Geometría métrica en el plano
8. ***Cuerpos geométricos***

ANUIES
Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



# Módulos de matemáticas

## Bloque 4

## Geometría euclidiana

# Módulo 8

# CUERPOS GEOMÉTRICOS

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España, Venezuela.

*Revisión técnica:* *Myriam P. Acuña Monsalve*
*Licenciada en economía,*
*Universidad Nacional*
*Autónoma de México*

*La presentación y disposición en conjunto de*
*CUERPOS GEOMÉTRICOS*
*son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado, la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento de información), sin consentimiento por escrito del editor*

*Derechos reservados*
*© 1984, Editorial Trillas, S. A. de C. V.*
*Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,*
*Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.*

*Miembro de la Cámara Nacional de la*
*Industria Editorial. Reg. núm. 158*

Primera edición, abril 1984
ISBN 968-24-1247-1

*Impreso en México*

# PRESENTACIÓN

## Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

## Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo ☞, el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

## ÍNDICE DE CONTENIDO

*Presentación*

*Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos*

8.1 Intersección de rectas, planos y rectas con planos

8.2 Poliedros

8.3 Conos y pirámides

8.4 Cilindros y prismas

8.5 Esfera

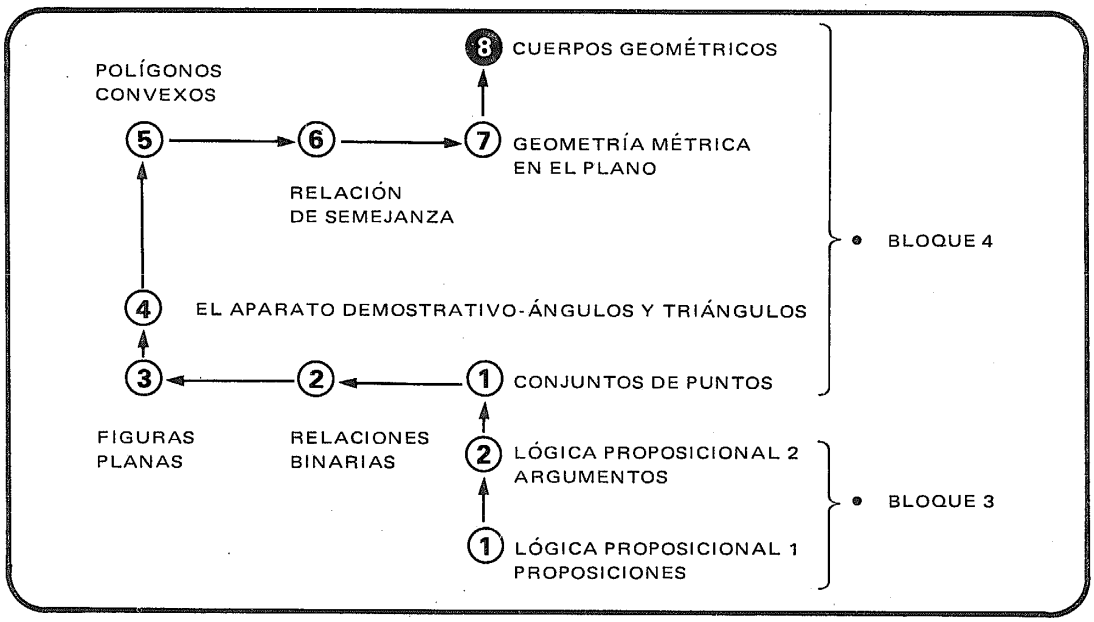
8.6 Área lateral, área total y volumen

## OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

### Bloque 4. Geometría euclidiana

*Objetivos*: establecer algunos hechos geométricos relacionados con ciertos conjuntos de puntos y demostrar determinados teoremas a partir de un grupo dado de axiomas o postulados básicos, aplicando las reglas del juego de la lógica

*Esquema estructural del bloque 4*




### Módulo 8. Cuerpos geométricos

*Objetivos*: establecer algunos hechos relacionados con los cuerpos geométricos y aplicarlos a la determinación de volúmenes y áreas

*Prerrequisitos*:

| | Bloques | Módulo(s) |
|---|---|---|
| • Nociones de la teoría de conjuntos | 1 | 1 |
| • Conceptos geométricos básicos | 4 | 1 |
| • Relaciones binarias en geometría | 4 | 2 |

8.1

# Intersección de rectas, planos y rectas con planos

1

Recordemos que,
dadas dos rectas ($r_1$ y $r_2$)
en un plano
y
la relación

**$r_1$ "interseca a" $r_2$**

puede ocurrir
alguna de las siguientes
cosas:

_____

_____

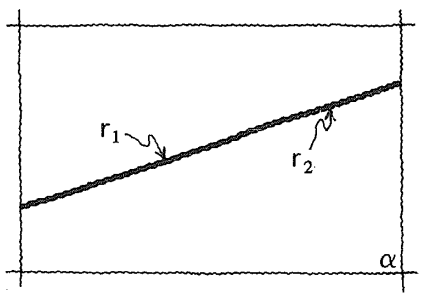
_____

Por ejemplo:

$r_1$ interseca en todos sus puntos a $r_2$
$r_1$ no interseca a $r_2$
$r_1$ interseca en un punto único a $r_2$

2

**1.** *$r_1$ interseca en todos sus puntos a $r_2$*




En este caso
decimos
que
las rectas $r_1$ y $r_2$
son:

_____ o _____

coincidentes iguales

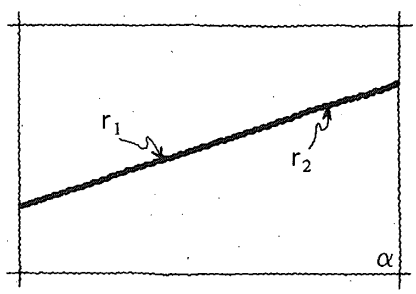
3

Escribimos:

**$r_1$ coincide con $r_2$**
**ó**

**$r_1 = r_2$**
**ó**

**$r_1 \cap r_2 =$** ⌊_____⌋



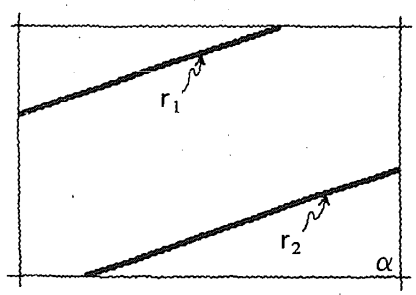

**$r_1 = r_2$**

4

**2.** *$r_1$ no interseca a $r_2$*

Escribimos:

**$r_1 \cap r_2 =$** ⌊_____⌋




$\phi$

5

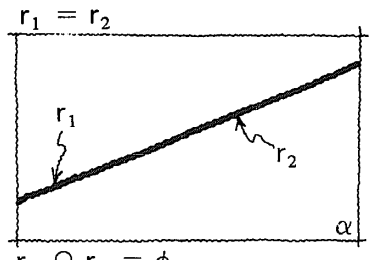
En estos dos casos decimos que:

$r_1$ ⌊_____⌋ $r_2$

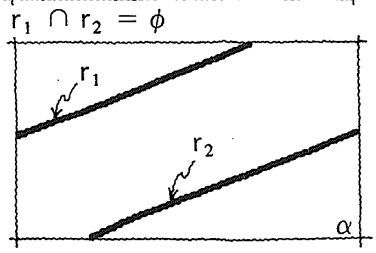
y escribimos:

$r_1$ ⌊____⌋ $r_2$

**1.**




**2.**



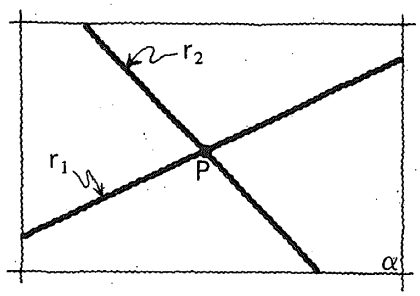

*es paralela a*

||

6

**3.** $r_1$ *interseca en un punto único a* $r_2$

Decimos
que
las rectas $r_1$ y $r_2$
son:

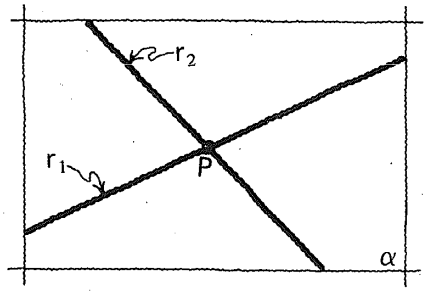



concurrentes
o intersecantes

7

En este caso,
escribimos:

$r_1 \cap r_2 =$ ____



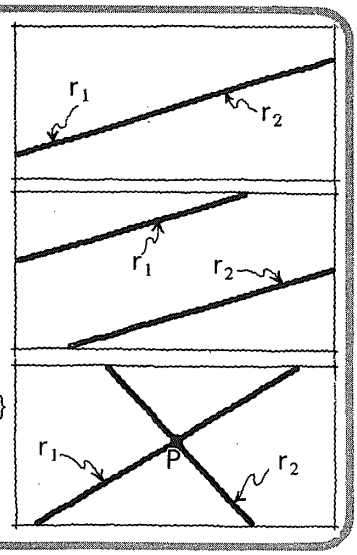

{P / P es único}

8

En resumen:

$r_1 \parallel r_2$
- $r_1 = r_2$
- $r_1 \cap r_2 = \phi$

$r_1 \nparallel r_2$
- $r_1 \cap r_2 =$ {P/P es único}



9

Imaginemos,
ahora,
dos rectas ($r_1$ y $r_2$)
"en el
espacio tridimensional"
y la relación
*$r_1$ interseca a $r_2$*

¿Qué puede ocurrir?

Estudiar con atención

$r_1$ y $r_2$ están en el mismo plano
1. $r_1$ interseca en todos sus puntos a $r_2$
2. $r_1$ no interseca a $r_2$
3. $r_1$ interseca en un punto único a $r_2$

$r_1$ y $r_2$ no están en el mismo plano
4. $r_1$ no interseca a $r_2$

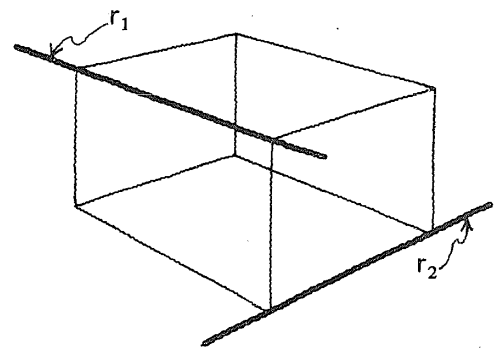
10

Estudiemos con atención este cuarto caso.

4. *$r_1$ no interseca a $r_2$*
   y
   *$r_1$ y $r_2$ no están en el mismo plano*
   *(o no son coplanares)*

Decimos
que
las rectas $r_1$ y $r_2$
son

**oblicuas.**

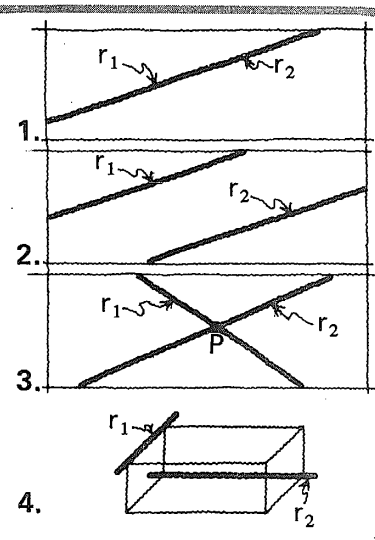



11

Nuevo resumen.

$r_1$ y $r_2$ son coplanares
- $r_1 \parallel r_2$ ($r_1$ y $r_2$ son paralelas)
  - $r_1 \cap r_2 = r_1 = r_2$
  - $r_1 \cap r_2 = \phi$
- $r_1 \nparallel r_2$ ($r_1$ y $r_2$ son concurrentes)
  - $r_1 \cap r_2 = \{P/P \text{ es único}\}$

$r_1$ y $r_2$ no son coplanares
- $r_1 \nparallel r_2$ ($r_1$ y $r_2$ son oblicuas)
  - $r_1 \cap r_2 = \phi$



12

Atención. Intentemos completar.

Dos rectas en el espacio tridimensional pueden ser: iguales o distintas.

Si son iguales entonces son: [ ]

Si son distintas entonces pueden ser:
- [ ] o
- [ ] u
- [ ] .

paralelas

paralelas
concurrentes
oblicuas

13

Atención. Intentemos completar.

Dos rectas en el espacio tridimensional pueden ser:

Coplanares o [ ]

Si son coplanares entonces pueden ser:
- [ ]
- [ ]
- [ ]

Si no son coplanares entonces son:
- [ ]

no coplanares

paralelas e iguales
paralelas y distintas
concurrentes

oblicuas

14

Atención. Intentemos completar.

Dos rectas en el espacio tridimensional pueden:

Intersecarse o [ ]

Si se intersecan entonces lo hacen:
- [ ] en cuyo caso se llaman [ ] o [ ]
- [ ] en cuyo caso se llaman [ ]

Si no se intersecan entonces pueden ser:
- [ ] en cuyo caso se llaman [ ] o [ ]
- [ ] en cuyo caso se llaman [ ]

no intersecarse

en todos sus puntos coincidentes o iguales
en un punto único
concurrentes
coplanares
paralelas
no coplanares
oblicuas

15

Atención. Intentemos completar.

Dos rectas en el espacio tridimensional pueden ser:

paralelas o: ____

Si son paralelas entonces pueden ser:
- ____
- o
- ____

Si no son paralelas entonces pueden ser:
- ____ si ____
- ____ si ____

no paralelas

iguales

distintas

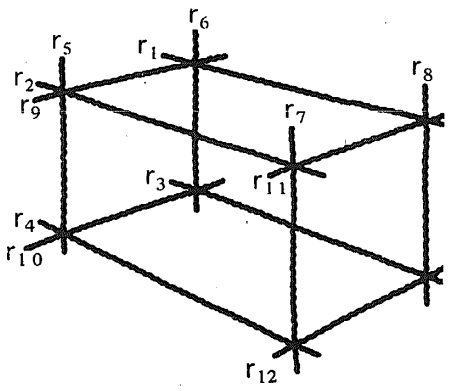
concurrentes
son coplanares
oblicuas
no son coplanares

16

Si $r_1$ *y* $r_2$ *no se intersecan* entonces son: ____

$r_1$ y $r_6$ son: ____

$r_4$ y $r_{12}$ son: ____




paralelas

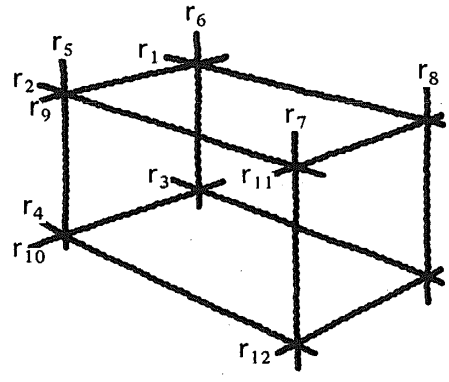
concurrentes

concurrentes

17

Si $r_9$ y $r_{12}$ no se intersecan entonces son: ____

$r_1$ y $r_7$ son: ____




paralelas

oblicuas

**4.8.1.1**

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

18

Atención.

Consideremos
ahora dos planos ($\alpha_1$ y $\alpha_2$)
y la relación

$\alpha_1$ **interseca a** $\alpha_2$

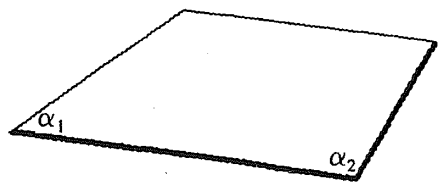
¿Qué puede ocurrir?

1. $\alpha_1$ *interseca en todos sus puntos a* $\alpha_2$
2. $\alpha_1$ *no interseca a* $\alpha_2$
3. $\alpha_1$ *interseca en una recta a* $\alpha_2$

19

**1.** $\alpha_1$ *interseca en todos sus puntos a* $\alpha_2$

Diremos
que
los planos $\alpha_1$ y $\alpha_2$
son:




o

en forma similar a lo que decimos de dos
rectas que se intersecan en todos sus puntos.

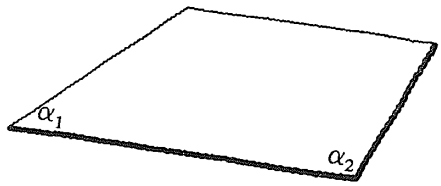
coincidentes

iguales

20

Escribimos:

$\alpha_1$ ⌊_____⌋ $\alpha_2$



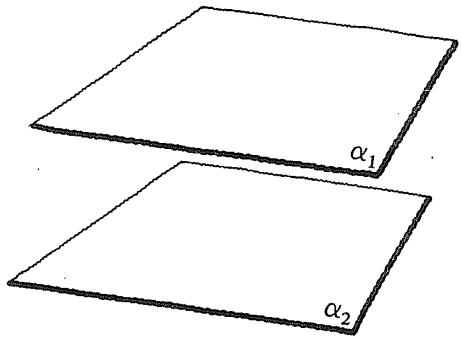

$\alpha_1 = \alpha_2$

21

**2.** $\alpha_1$ *no interseca a* $\alpha_2$

Escribimos:

$\alpha_1 \cap \alpha_2 =$ ⌊_____⌋




$\phi$

22

Continuando con la similitud,

diremos que:

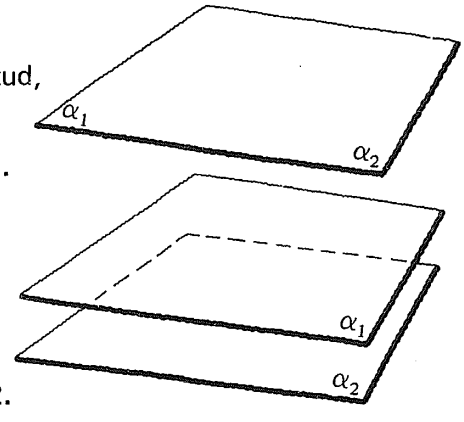
$\alpha_1$ ⌊_____⌋ $\alpha_2$

y escribimos:

$\alpha_1$ ⌊_____⌋ $\alpha_2$

**1.**

**2.**



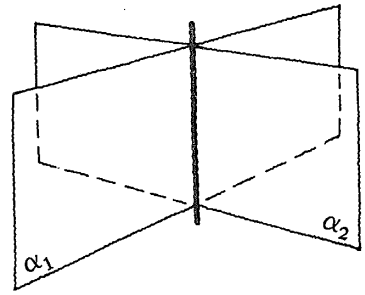

es paralelo a

$\parallel$

23

**3.** $\alpha_1$ *interseca en una recta a* $\alpha_2$

Puede demostrarse
que
si dos planos distintos
se intersecan
su
intersección es una recta.




En este caso,
llamaremos
a los planos $\alpha_1$ y $\alpha_2$ :

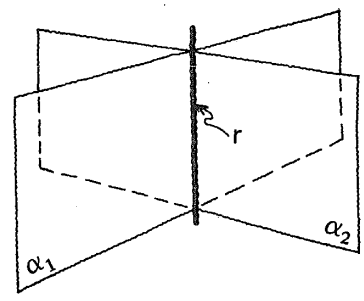
└──────┘ o └──────┘

concurrentes
intersecantes

24

Escribiremos:

$\alpha_1 \cap \alpha_2 =$ └──────┘




{ r/r es única }

25

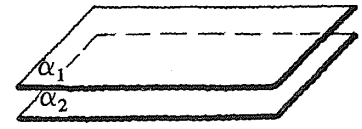
En resumen:

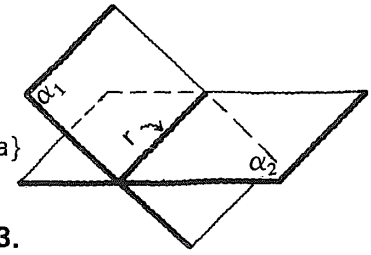
$\alpha_1 \parallel \alpha_2$
- $\alpha_1 = \alpha_2$
- $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \phi$

$\alpha_1 \nparallel \alpha_2$
- $\alpha_1 \cap \alpha_2 =$ {r/r es única}

**1.**

**2.**



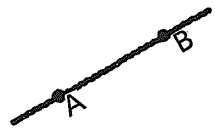




**3.**

26

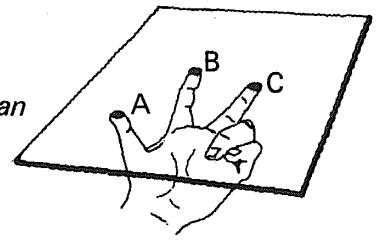
Hemos visto que,
así como
**2** *puntos determinan una recta*
y escribimos.

$\overleftrightarrow{AB}$




**3** *puntos no colineales determinan un plano*
y podemos escribir:

$\overline{ABC}$



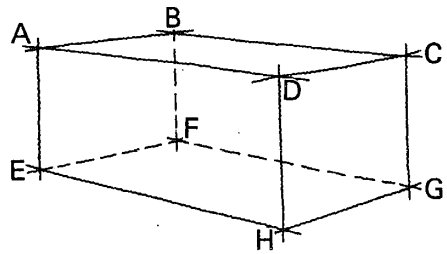

27

Sabemos que:

$\overline{ABD} \cap \overline{EFH} = \phi$

$\overline{AED} \cap \overline{BFC} = \phi$

$\overline{ABE} \cap \overline{DCH} = \phi$




Los planos $\overline{ABD}$ y $\overline{EFH}$ son. [ ]

Los planos $\overline{ABD}$ y $\overline{ABE}$ son: [ ]

Los planos $\overline{ABE}$ y $\overline{ABF}$ son: [ ]

paralelos

concurrentes o intersecantes

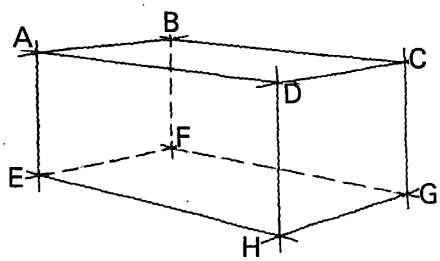
coincidentes o iguales y por tanto, paralelos

28

$\overline{ABD} \cap \overline{EFH} = \phi$

$\overline{AED} \cap \overline{BFC} = \phi$

$\overline{ABE} \cap \overline{DCH} = \phi$




$\overline{ABD} \cap \overline{AED} =$ [ ]

$\overline{BFC} \cap \overline{EFH} =$ [ ]

$\overline{ABH} \cap \overline{DCH} =$ [ ]

$\overleftrightarrow{AD}$

$\overleftrightarrow{FG}$

$\overleftrightarrow{HG}$

**4.8.1.2**

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

29

Atención.

Consideremos,
ahora,
una recta (r)
y un plano ($\alpha$)
y la relación

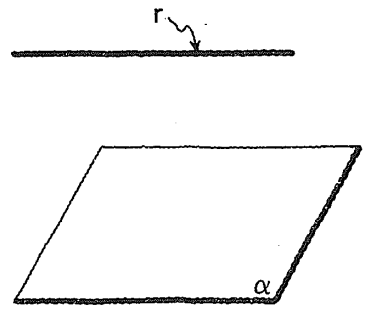
**r interseca a $\alpha$**

¿Qué puede ocurrir?

1. r no interseca a $\alpha$
2. r interseca en un punto único a $\alpha$
3. r interseca en todos sus puntos a $\alpha$

30

**1.** *r no interseca a $\alpha$*
Decimos que
*la recta r*
*es paralela*
*al plano $\alpha$,*
cosa que escribimos así:

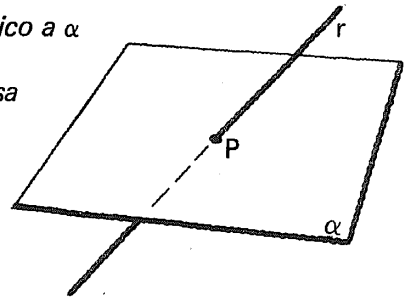



r || $\alpha$

31

**2.** *r interseca en un punto único a* $\alpha$
Decimos que
*la recta r perfora o atraviesa al plano* $\alpha$

Simbólicamente:

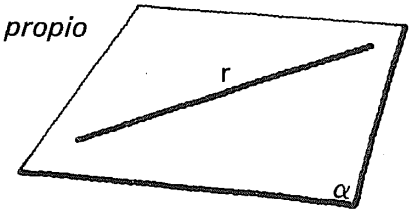



$r \cap \alpha = \{P/P \text{ es único}\}$

32

**3.** *r interseca en todos sus puntos a* $\alpha$
En este caso, *la recta r está estrictamente incluida en el plano* $\alpha$,
o
*la recta r es un subconjunto propio del plano* $\alpha$.

Simbólicamente:



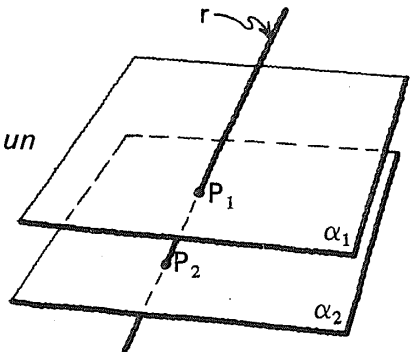

$r \cap \alpha = r$

o

$r \subset \alpha$

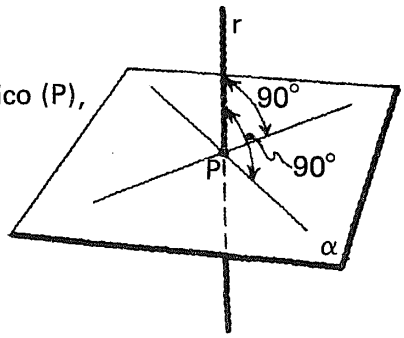
33

Podemos, también,
ver intuitivamente que:
*si una recta (r) interseca a un plano* $(\alpha_1)$ *en un punto único* $(P_1)$
entonces *interseca a otro plano* $(\alpha_2)$, *paralelo a aquél, en un punto único* $(P_2)$.



34

Una recta (r)
es
perpendicular a un plano ($\alpha$)
si
intersecándolo en un punto único (P),
es perpendicular a
cualquier recta que contenga P
y
esté contenida en el plano $\alpha$.




Simbólicamente:

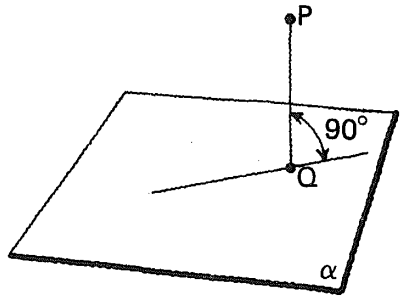
$r \perp \alpha$

35

La **distancia de un punto** (P)

**a un plano** ($\alpha$)

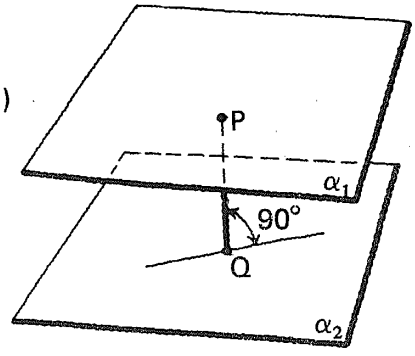
es
la medida del segmento $\overline{PQ}$,
tal que $Q \in \alpha$ y $\overleftrightarrow{PQ} \perp \alpha$




36

La **distancia entre**
**dos planos paralelos** ($\alpha_1$ y $\alpha_2$)

es
la medida del segmento $\overline{PQ}$,
tal que $P \in \alpha_1$, $Q \in \alpha_2$ y
$\overleftrightarrow{PQ} \perp \alpha_2$ V $\overleftrightarrow{PQ} \perp \alpha_1$



37

$\overline{ABC} \cap \overline{EFG} = \phi$

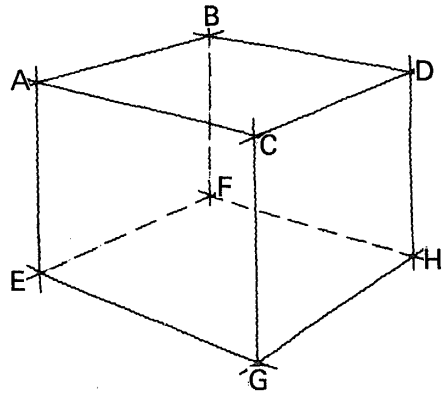
$\overline{AEG} \cap \overline{BFH} = \phi$

$\overline{ABE} \cap \overline{CDG} = \phi$

$\overline{ABC} \cap \overline{AEG} =$ ____

$\overleftrightarrow{AC} \cap \overline{ABE} =$ ____

$\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{CG} =$ ____




$\overleftrightarrow{AC}$

$\{A\}$

$\{C\}$

38

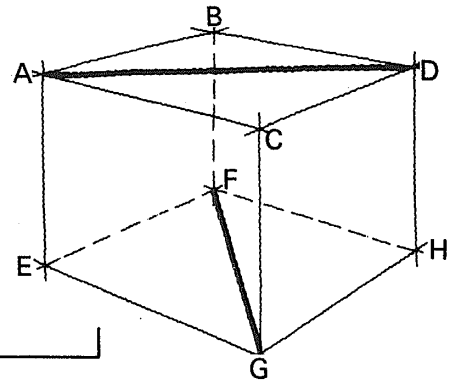
$\overline{ABC} \cap \overline{EFG} = \phi$

$\overline{AEG} \cap \overline{BFH} = \phi$

$\overline{ABE} \cap \overline{CDG} = \phi$

$\overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{FG} =$ ____

Las rectas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{FG}$ son: ____




$\phi$

oblicuas

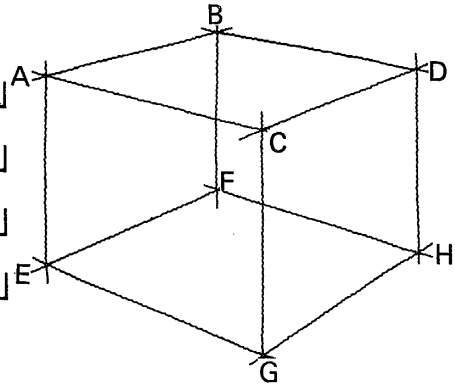
39

$\overleftrightarrow{AB} \cap \overline{ABG} =$ ____

$\overleftrightarrow{AC} \cap \overline{ABG} =$ ____

$\overleftrightarrow{AE} \cap \overline{ABG} =$ ____

$\overleftrightarrow{CD} \cap \overline{ABG} =$ ____




$\overleftrightarrow{AB}$

$\{A\}$

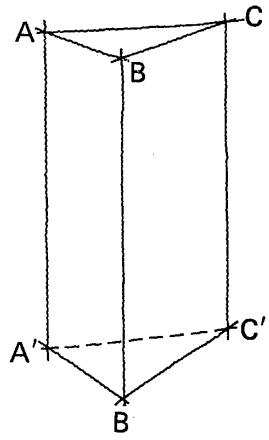
$\{A\}$

$\phi$

Señalar la opción correcta.
Sabiendo que

$\overline{ABC} \parallel \overline{A'B'C'}$

| | V | F |
|---|---|---|
| $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ | | |
| $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'C'}$ | | |
| $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$ | | |




F

F

F

**4.8.1.3**

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

**4.8.1**

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

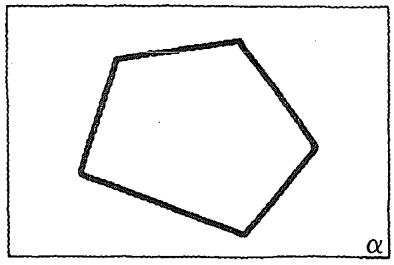
- *caracterizar* los casos de intersección de dos rectas cualesquiera en el espacio tridimensional;
- *caracterizar* los casos de intersección de dos planos cualesquiera;
- *caracterizar* los casos de intersección de una recta y un plano;
- *definir* lo que es una recta perpendicular a un plano;
- *definir* la distancia de un punto a un plano, y entre dos planos paralelos;
- *identificar* rectas: paralelas, concurrentes y oblicuas en una representación dada;
- *identificar* planos: paralelos o intersecantes en una representación dada,
- *señalar* la intersección de rectas entre sí o rectas con planos, o planos entre sí, en una representación dada.

8.2

Poliedros

41

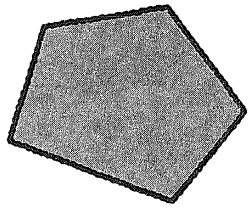
Hemos visto que
la unión de tres o más
segmentos de recta
en un plano
constituyen
un:




polígono

42

A la unión del polígono
y
su interior
le hemos llamado:

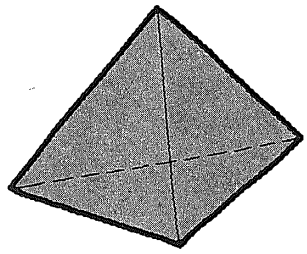


región poligonal

43

Ahora,
a la unión de 4 o más
regiones poligonales
le llamaremos

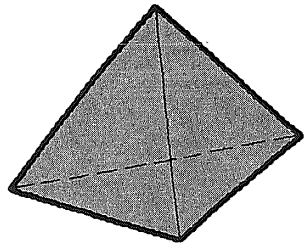
**poliedro.**



44

Y
a la unión del poliedro
y
su interior
le llamaremos

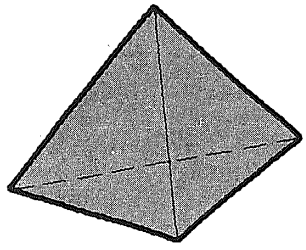
**poliedro sólido.**



45

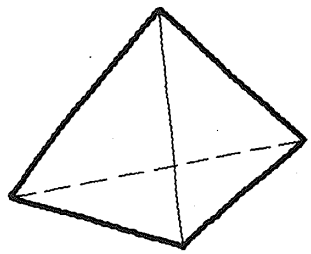
A las regiones poligonales
que
constituyen el poliedro
les llamaremos

**caras** del poliedro.



46

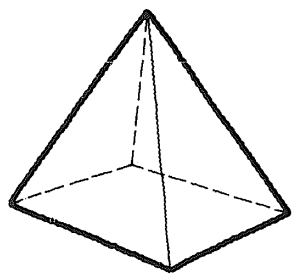
El poliedro representado tiene:
___ caras.



4

47

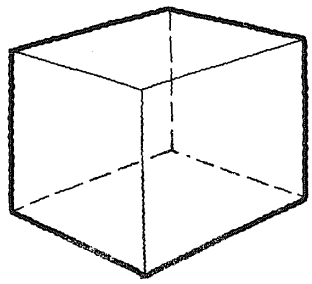
El poliedro representado tiene:
___ caras.



5

48

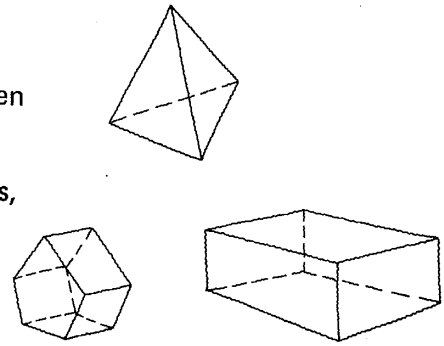
El poliedro representado tiene:
___ caras.



6

49

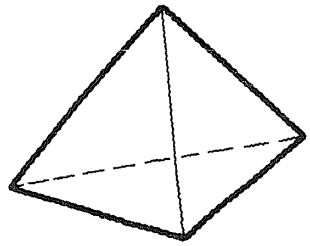
Las regiones que constituyen las caras del poliedro pueden ser: triangulares, cuadrangulares, pentagonales, hexagonales, etcétera.



50

A un poliedro de 4 caras le llamamos

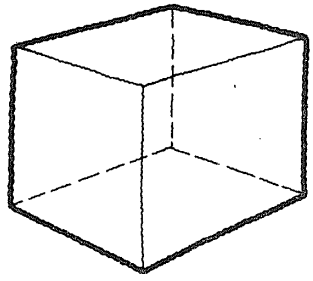
**tetraedro.**



51

A un poliedro de 6 caras le llamamos

**hexaedro.**



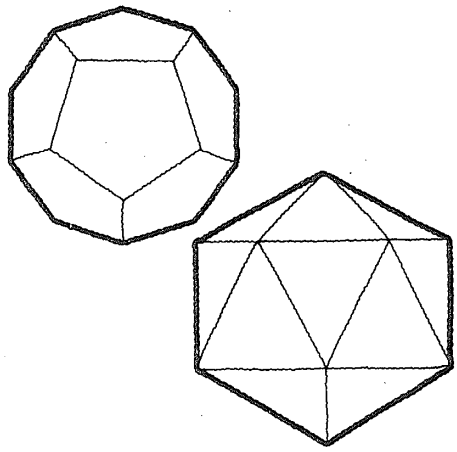
52

A un poliedro de 12 caras le llamamos

**dodecaedro**

y a uno de 20 caras

**icosaedro.**

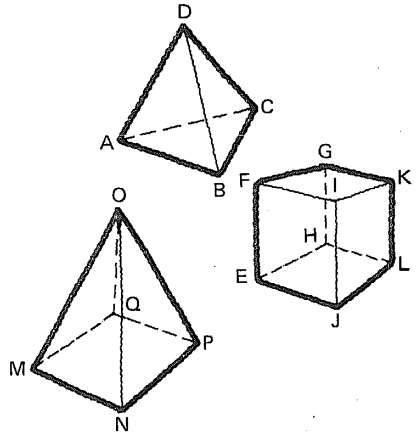


53

Dos caras de un poliedro pueden intersecarse:

- en un segmento de recta, ejemplo:
  ▲ ABD ∩ ▲ DBC = $\overline{DB}$
- en un punto único, ejemplo:
  ▲ MON ∩ ▲ OQP = { 0 }

  o
- en el conjunto vacío, ejemplo:
  ■ EFGH ∩ ■ JIKG = $\phi$

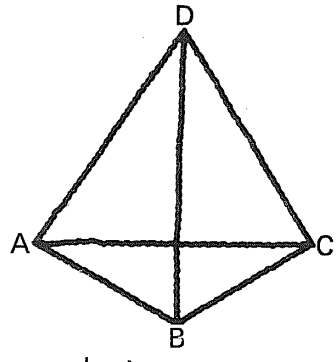



54

Si dos caras de un poliedro se intersecan en un segmento de recta, este segmento de recta recibe el nombre de

**arista** del poliedro.

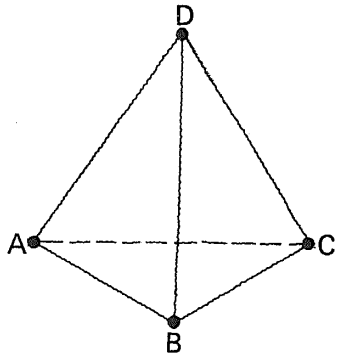
El tetraedro representado tiene: ⌊_____⌋ aristas.



55

Las aristas de un poliedro se intersecan en puntos llamados

**vértices** del poliedro.




El tetraedro representado tiene: [ ] vértices.

4

56

Podemos hablar de

**poliedros convexos**
y
**poliedros cóncavos.**

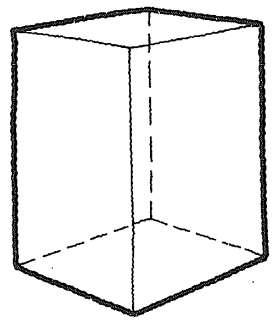
57

Señalar la opción correcta.

El poliedro sólido representado es

**convexo/cóncavo,**

de acuerdo con la idea que tenemos de convexidad.

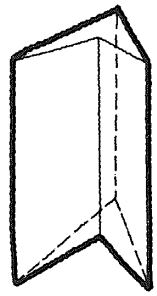


convexo

58

El poliedro sólido representado es

**convexo/cóncavo**

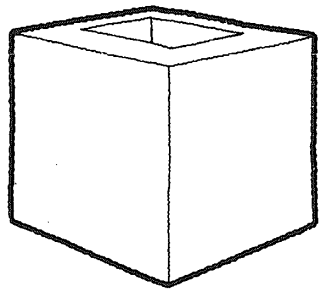


cóncavo

59

El poliedro sólido representado es

**convexo/cóncavo**

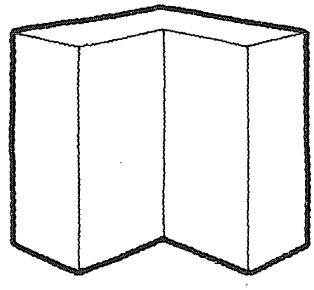


cóncavo

60

El poliedro sólido representado es

**convexo/cóncavo**

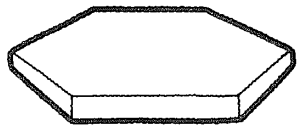


cóncavo

61

El poliedro sólido representado es

**convexo/cóncavo**



convexo

4.8.2.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

62

Podemos hablar de

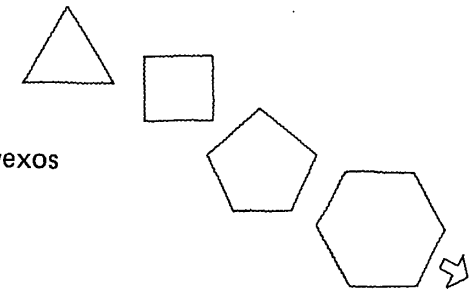
**poliedros regulares**

así como hemos hablado de

**polígonos regulares**

63

Hemos visto
que
el número de
polígonos regulares convexos
es
ilimitado.



64

En cambio,
el número de poliedros regulares diferentes
¡apenas
llega a 5!

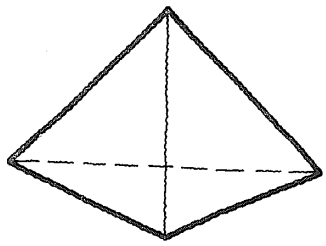
Tienen 4, 6, 8, 12 y 20 caras congruentes.

65

Los cinco poliedros regulares:

**1. Tetraedro**

Tiene 4 caras
en forma de
región triangular equilátera.

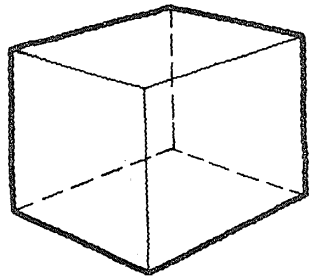


66

**2. Hexaedro**

Tiene 6 caras cuadradas.
Se le llama frecuentemente

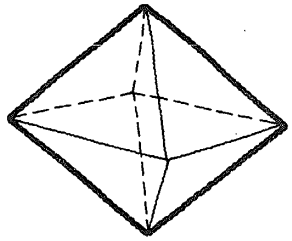
**cubo.**



67

**3. Octaedro**

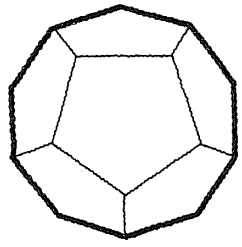
Tiene 8 caras triangulares
equiláteras.



68

**4. Dodecaedro**

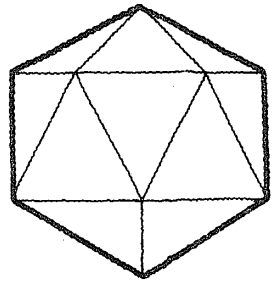
Tiene 12 caras pentagonales
regulares convexas.



69

**5. Icosaedro**

Tiene 20 caras triangulares equiláteras.



70

No podemos dejar
de hacernos la pregunta:

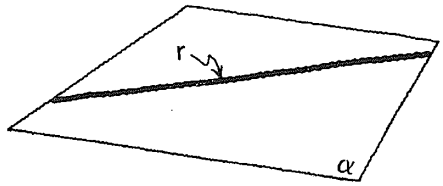
**¿Por qué sólo 5 poliedros regulares?**

71

Antes de responder a esta pregunta, vamos a establecer, en forma intuitiva, algunos hechos importantes en relación con planos, rectas y puntos en el espacio.

72

Consideremos un plano ($\alpha$) y una recta r incluida en él, que lo divide en dos porciones ajenas que hemos llamado:




[ ]

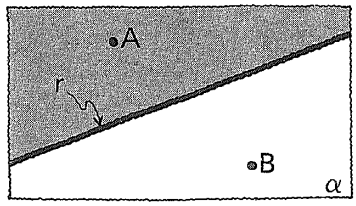
y una tercera porción constituida por la recta misma, a la que llamamos frontera

semiplanos (abiertos)

73

A la unión de la recta r con cada uno de los semiplanos abiertos, le hemos dado el nombre de:

[ ]




semiplano cerrado

74

Hemos simbolizado así:

[ ]

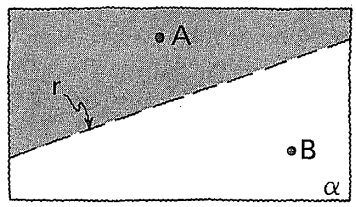
un **semiplano abierto**, como el señalado en la ilustración,

y así:

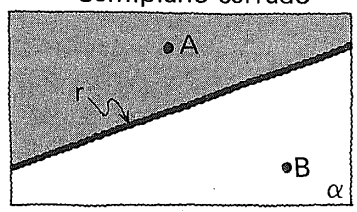
[ ]

el **semiplano cerrado** correspondiente

Semiplano abierto




Semiplano cerrado




Sp (r,A)

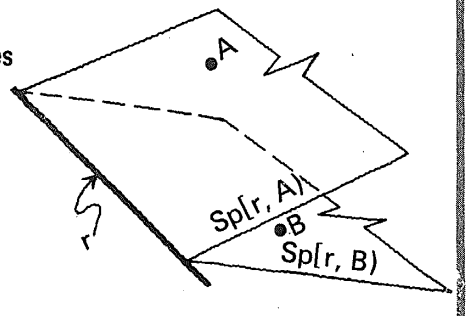
Sp [r, A)

75

Consideremos, ahora,
la unión de
dos semiplanos concurrentes
con una recta común (r),
que es su intersección.

A la figura así formada
le llamaremos

**ángulo diedro**



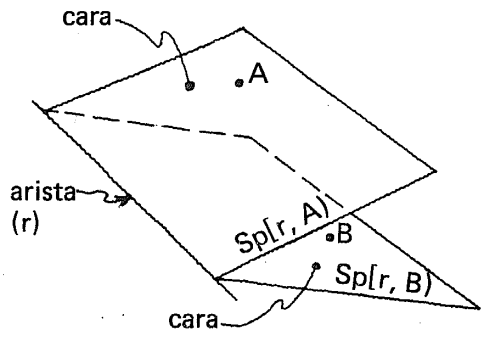

76

Los semiplanos Sp [r, A) y Sp [r, B)
son las

**caras del diedro**

y
la recta r
la

**arista del diedro**

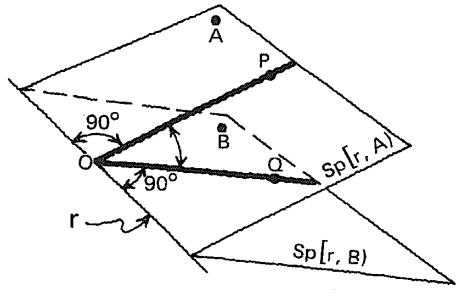



77

Atención.

Si • O∈r
- P∈Sp[r,A)
- Q∈Sp[r,B)
- $\overleftrightarrow{OP} \perp r$
- $\overleftrightarrow{OQ} \perp r$

entonces



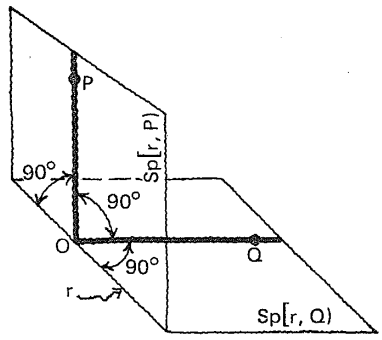

**$\measuredangle POQ$ = medida del ángulo diedro.**

78

Si $\measuredangle POQ = 90°$

hablamos
de un ángulo

**diedro recto**



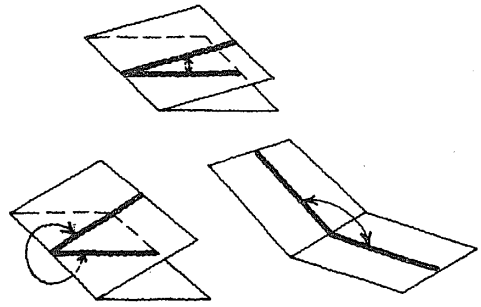

79

Podemos hablar
también de ángulos

**diedros agudos,**

**diedros obtusos,**

**diedros cóncavos.**

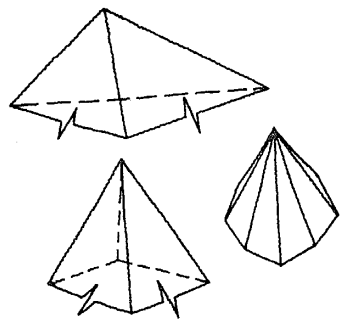


80

Ahora,
imaginemos
la concurrencia
de tres o más planos
en un punto común.

Forman una figura
llamada

**ángulo poliedro.**

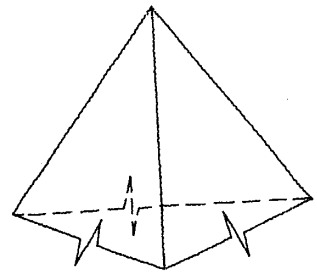


81

Podemos concebir
un **ángulo poliedro**
como la

**unión de**

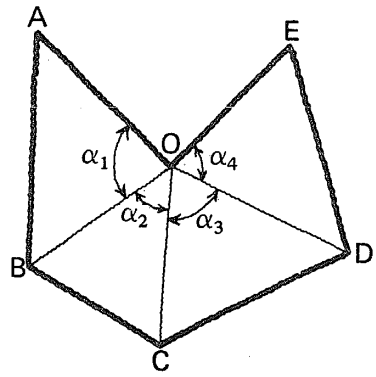
tres o más **regiones angulares planas** con vértice común, en el
espacio tridimensional.



82

Para darnos una idea
de lo que es
un ángulo poliedro
podemos recurrir
al siguiente
experimento.

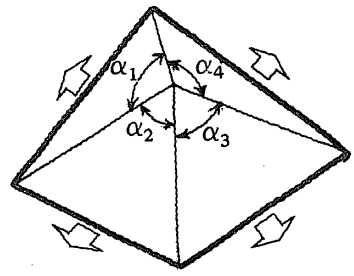
**1.** recortemos la figura
adjunta por la línea
de trazo grueso




83

**2.** Doblemos por las líneas
de trazo fino, y hagamos
coincidir los bordes OA y
OE.

La figura tridimensional
obtenida es una buena
representación de un
ángulo poliedro, que
se extiende
indefinidamente como
sugieren las flechas.



84

La unión de un ángulo
poliedro así definido,
y
la "porción espacial interior"
constituye
un

**ángulo poliedro sólido.**

85

De acuerdo con estas nociones,
¿cuántas regiones angulares
planas pueden formar un
ángulo poliedro?

| | Sí | No |
|---|---|---|
| dos | ☐ | ☐ |
| tres | ☐ | ☐ |
| más de tres | ☐ | ☐ |

No

Sí

Sí

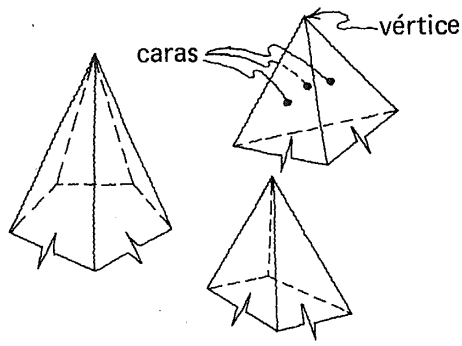
86

Un ángulo poliedro
puede estar formado
por tres o más
regiones angulares planas,
que constituyen las

**caras del ángulo poliedro.**

El vértice común
de las regiones
angulares
planas se llamará

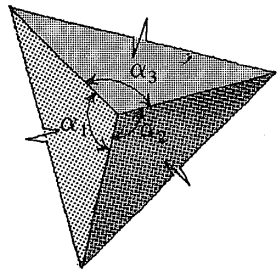
**vértice del ángulo poliedro.**



87

Un ángulo poliedro
formado por
tres regiones angulares
planas
recibe el nombre de

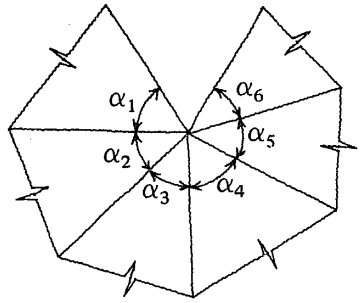
**ángulo triedro**




88

Ahora bien,

para que se pueda
formar un ángulo
poliedro, digamos
de 6 caras,
se debe verificar
en relación con la
figura adjunta:




$\measuredangle\alpha_1 + \measuredangle\alpha_2 + \measuredangle\alpha_3 + \measuredangle\alpha_4 + \measuredangle\alpha_5 + \measuredangle\alpha_6$ ⌊⌋ ⌊⌋ $< 360°$

Indicar alguno de los signos: $=, >, <, \leqslant$ ó $\geqslant$,

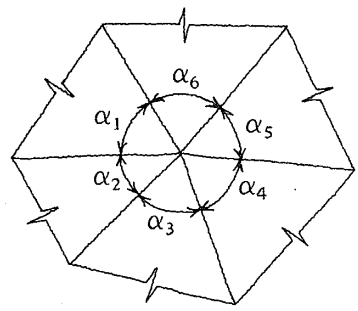
Indicar la medida en grados

89

Podemos observar
que.
si

$\measuredangle\alpha_1 + \measuredangle\alpha_2 + \measuredangle\alpha_3 + \measuredangle\alpha_4 + \measuredangle\alpha_5 + \measuredangle\alpha_6 = 360°$

la figura "se aplana".



90

Atención.

¿Qué pasaría
si, en relación con el ejemplo anterior,

$\sphericalangle\alpha_1 + \sphericalangle\alpha_2 + \sphericalangle\alpha_3 + \sphericalangle\alpha_4 + \sphericalangle\alpha_5 + \sphericalangle\alpha_6 > 360°$ ?

Se puede verificar
experimentalmente
que
si la suma de las medidas
de los ángulos planos es
mayor de 360°
se forma lo que podemos
llamar un

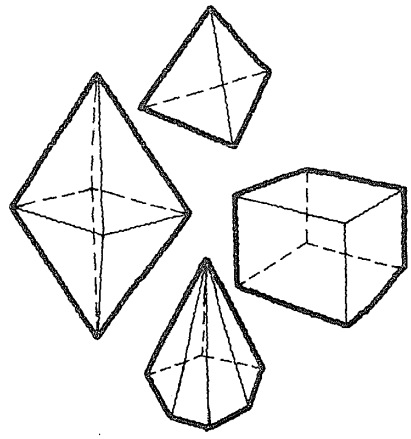
**ángulo poliedro cóncavo.**

91

Observemos que
en un

**poliedro convexo**

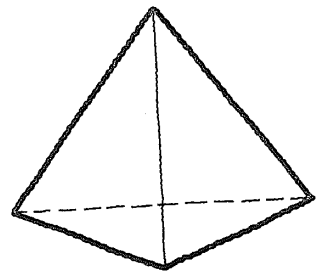
se forman
en los vértices
precisamente:



ángulos poliedros convexos

92

Por ejemplo:
el **tetraedro** aquí
representado
tiene:

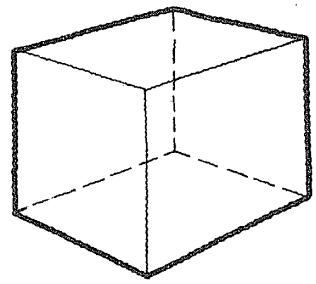


4 ángulos poliedros convexos,

cada uno formado por: 3 caras.

93

El **hexaedro regular convexo** o **cubo** representado
tiene:
⌊____⌋ ángulos poliedros convexos
cada uno
formado por: ⌊____⌋ caras.



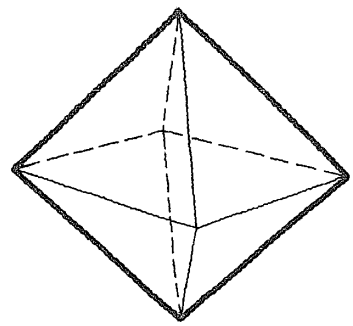
8

3

94

El **octaedro regular convexo**
representado
tiene:

⌊____⌋ ángulos poliedros convexos
y cada uno de ellos
tiene: ⌊___⌋ caras.



6

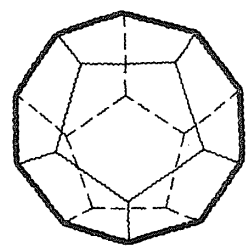
4

95

El **dodecaedro regular**

**convexo**

tiene:
⌊____⌋ ángulos poliedros
convexos
y cada uno de ellos
tiene: ⌊____⌋ caras.



20

3

96

El **icosaedro regular convexo**

tiene:
[____] ángulos poliedros convexos
y cada uno de ellos
tiene: [____] caras.

12

5

97

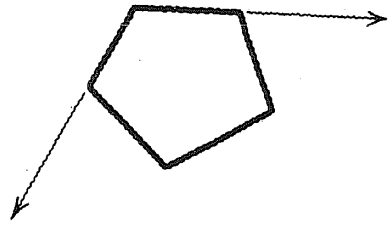
Así como los **ángulos interiores**
de un
polígono

**no son**

**subconjuntos**

**del**

**polígono. . .**



98

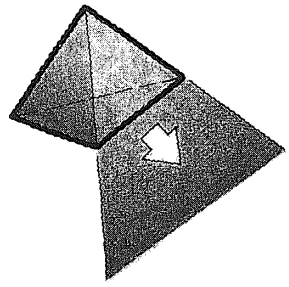
. . .los **ángulos poliedros**
de
un poliedro

**no son**

**subconjuntos**

**del**

**poliedro.**



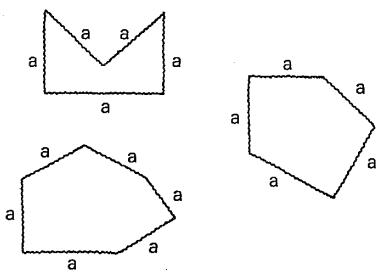
99

Recordemos
que
un polígono regular
es aquel que
tiene sus lados y sus: ____
congruentes.

ángulos interiores

100

Esta definición
nos impide
considerar
como
polígonos regulares
a los
aquí
representados,
porque:




____

aunque sus lados son
congruentes, sus ángulos
interiores no lo son

101

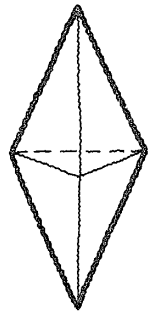
En la misma forma,
la definición de

**poliedro regular**

pide que
sus caras y sus **ángulos poliedros**
sean
congruentes.

102

Esto nos impide
considerar
como poliedros regulares
figuras como
la aquí representada,
que tienen
sus caras congruentes,
pero no sus ángulos
poliedros

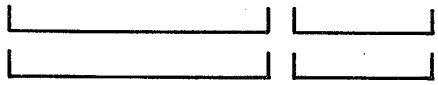


103

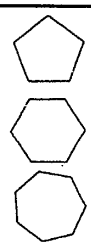
Ahora bien,
las caras de un poliedro
regular convexo
deberán ser
regiones poligonales regulares
convexas.

104

Enumeremos las regiones poligonales que pueden ser caras de un poliedro regular convexo:



- Pentagonal regular convexa
- Hexagonal regular convexa
- Heptagonal regular convexa



etc.

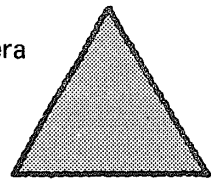
Triangular equilátera

Cuadrada

105

Veamos
cuáles poliedros regulares convexos
pueden tener

**caras triangulares equiláteras.**



Cada uno de los ángulos poliedros de cualquiera
de estos poliedros
deberá estar formado, como
ya hemos visto, por: ⌊_____⌋
regiones angulares planas.

tres o más

Debemos recordar que
la suma de las medidas de los ángulos planos
que forman un ángulo poliedro
debe ser: ⌊_____⌋.

menor de 360°

106

Cada uno de los ángulos interiores
de un triángulo equilátero
tiene una medida de: ⌊_____⌋
por lo tanto,
pueden concurrir en cada
vértice de un poliedro:

60°

⌊_____⌋ o ⌊_____⌋ o ⌊_____⌋

3 4 5

regiones triangulares equiláteras,
porque:

$3 \times 60° = 180°$ y $180° < 360°$
$4 \times 60° = 240°$ y $240° < 360°$
$5 \times 60° = 300°$ y $300° < 360°$

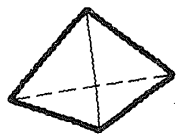
además:

$6 \times 60° = 360°$ y $360° \not< 360°$

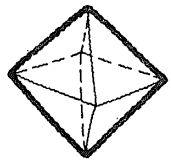
⌊_____⌋

107

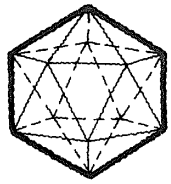
Esto define
a los tres poliedros regulares convexos
que tienen caras triangulares equiláteras.



El **tetraedro**: con 4 ángulos
poliedros formado cada uno
por 3 caras.



El **octaedro**:
con 6 ángulos poliedros
formado cada uno por
4 caras.



El **icosaedro**:
con 12 ángulos poliedros
formado cada uno
por 5 caras.

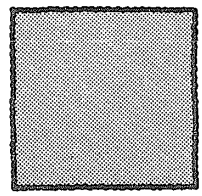
108

No puede haber
otros
poliedros regulares convexos
con
caras triangulares.

109

Analicemos los posibles
**poliedros** regulares convexos
con

**caras cuadradas.**



Cada uno de los ángulos interiores
de un cuadrado mide ⌊_____⌋.

90°

Pueden concurrir en cada vértice
del poliedro:
⌊_____⌋ caras cuadradas,

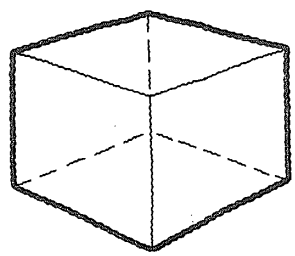
3

porque: ⌊_____⌋

$3 \times 90° = 270°$ y $270° < 360°$
además:
$4 \times 90° = 360°$ y $360° \not< 360°$

110

Es posible solamente
un poliedro regular convexo con
caras cuadradas:

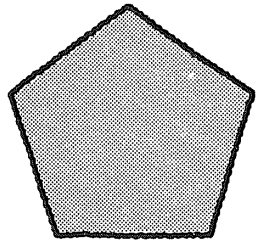


El **hexaedro** o **cubo**,
con 8 ángulos poliedros,
cada uno formado
por 3 caras cuadradas.

111

Ahora veamos
cuáles son
los posibles **poliedros** regulares convexos
con

**caras pentagonales.**



Cada uno de los ángulos interiores
de un pentágono regular convexo
mide: [_____].
Pueden concurrir en cada vértice
del poliedro [____] caras pentagonales,

porque:

[_____]

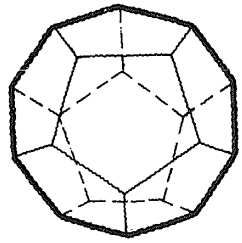
108°

3

$3 \times 108° = 324°$ y $324° < 360°$
además:
$4 \times 108° = 432°$ y $432° \not< 360°$

112

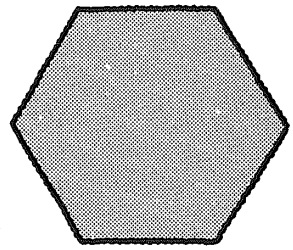
El único posible
poliedro regular convexo
con
caras pentagonales:



El **dodecaedro,**
con 20 ángulos poliedros,
cada uno formado
por 3 caras.

113

Ahora,
¿cuáles son los posibles
**poliedros** regulares convexos
con **caras hexagonales**?



Cada uno de los ángulos interiores
de un hexágono regular convexo
mide:[_____].
Pueden concurrir en cada vértice
del poliedro,[_____] caras hexagonales,
porque:

[_____]

120°

ninguna

$120° \times 3 = 360°$ y $360° \not< 360°$

114

No pueden existir
poliedros regulares convexos
con
caras hexagonales
ni
poligonales con un número
de lados mayor que 6.

115

Entonces,
los únicos poliedros regulares convexos
posibles
son
los que hemos enumerado al principio:

1. ┌──────┐
2. ┌──────┐
3. ┌──────┐
4. ┌──────┐
5. ┌──────┐

tetraedro

hexaedro o cubo

octaedro

dodecaedro

icosaedro

**4.8.2**

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *enumerar* los 5 poliedros regulares convexos señalando para cada uno: el número de caras, aristas y vértices;
- *explicar* con sus propias palabras lo que es un ángulo diedro y un ángulo poliedro;
- *explicar* con sus propias palabras por qué no existen más de 5 poliedros regulares convexos.

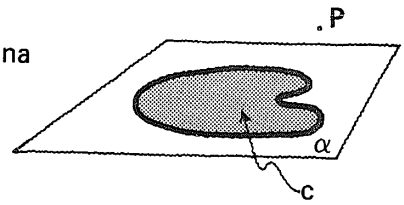
8.3

Conos y pirámides

116

Consideremos:
un plano ($\alpha$),
y la región determinada por una curva cerrada simple (c) contenida en él.

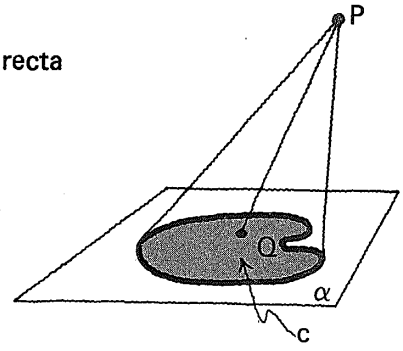
Además,
un punto (P)
no perteneciente al plano $\alpha$.




117

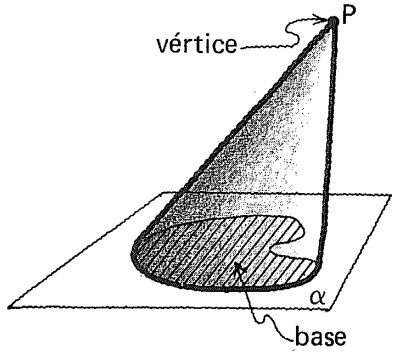
El conjunto de segmentos de recta $\overleftrightarrow{PQ}$, tales que $Q \in c$ constituyen una figura en el espacio tridimensional que llamaremos

**cono o cono sólido.**



118

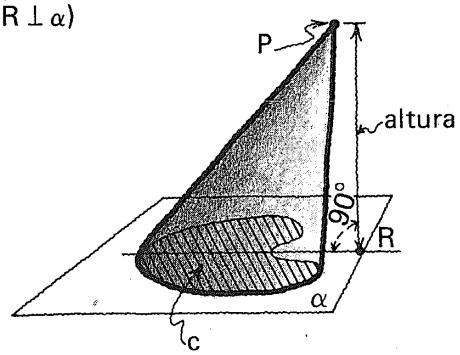
Al punto P le llamaremos **vértice** del cono, y a la región c
la **base** del cono




119

La distancia $\overline{PR}$ ($R \in \alpha$ y $\overleftrightarrow{PR} \perp \alpha$) del punto P al plano $\alpha$ constituirá la

**altura*** del cono.

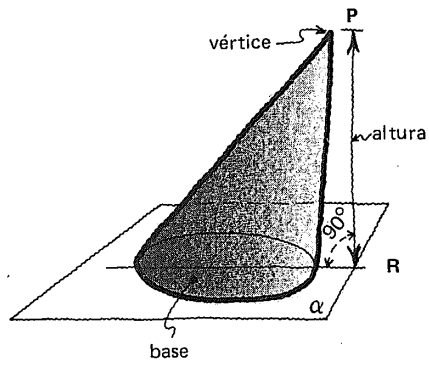



*Llamaremos altura al segmento $\overline{PR}$ y a la medida de dicho segmento.

120

Si la base del cono es un **círculo** la figura se denominará

**cono circular.**



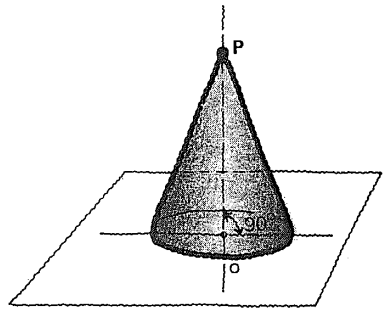
121

Si
O es el centro del círculo
y
$\overleftrightarrow{PO} \perp \alpha$

el cono circular
se denominará

**cono circular recto.**

$\overleftrightarrow{PO}$ es la **altura** de este cono.

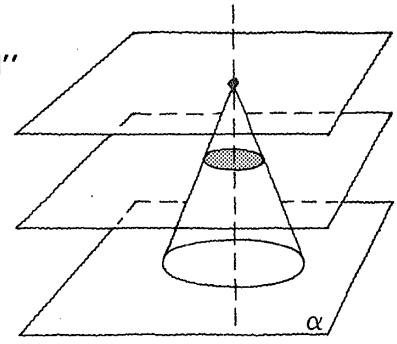



122

La intersección de un plano paralelo
al plano $\alpha$,
y el cono
se llamará, si no es vacía,

**sección transversal "horizontal"**
del cono.

Podemos observar que
una sección transversal
"horizontal" de un
cono circular recto
como el representado
es: [ ].




un círculo o un punto

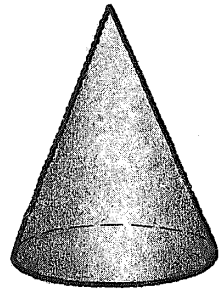
123

En una figura tridimensional
como la que hemos descrito,
que recibe el nombre genérico
de

**cuerpo geométrico,**

podemos identificar
tres zonas,
como lo hemos hecho en una
curva cerrada simple:

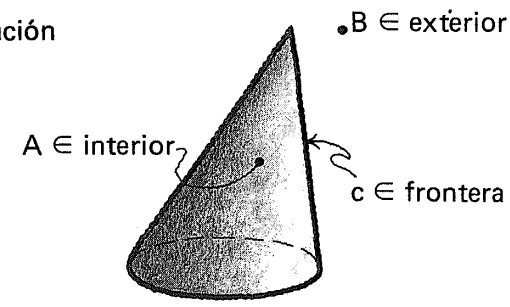
- interior
- [ ]
- [ ]



exterior
frontera

124

Imaginemos esto,
ya que es difícil
representar esta situación
en un plano.

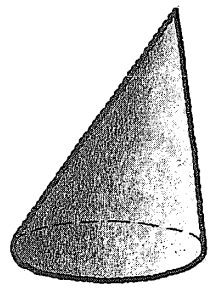



125

En el cono que hemos definido,
la frontera está formada
de dos partes:

1. la **base,**
y
2. lo que llamaremos
   **superficie lateral.**

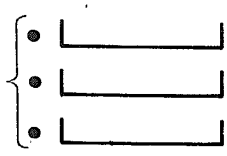
A todo este conjunto de puntos
le llamamos **cono hueco**
o **superficie total** del cono.

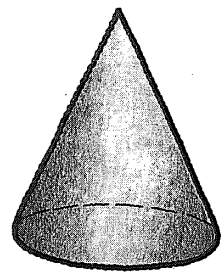


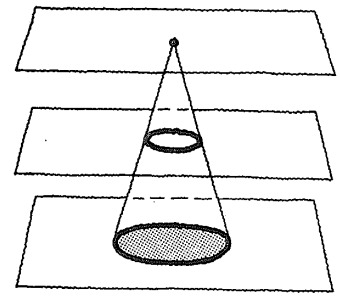
126

Una sección transversal "horizontal"
de un cono circular recto hueco

puede ser:







una circunferencia

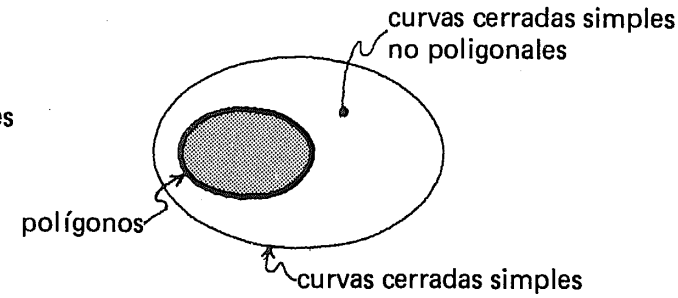
un punto (el vértice)

un círculo (la base)

127

Hemos visto que:
un subconjunto de curvas cerradas simples
lo constituyen

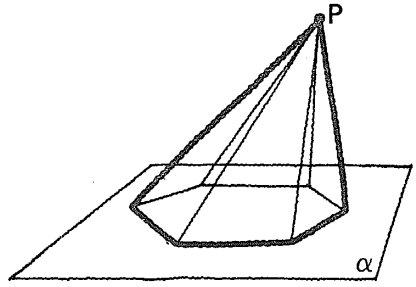
los **polígonos.**




128

Si la base de un cono
es una región poligonal
el cuerpo geométrico
recibe el nombre de

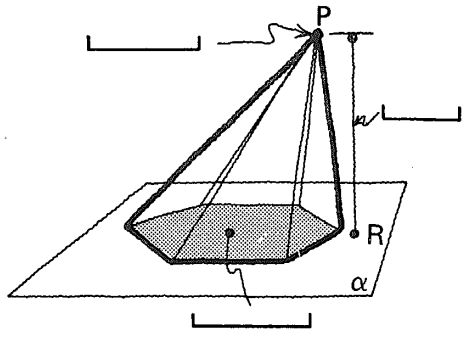
**pirámide.**




129

Etiquetemos
los elementos
de una

**pirámide:**




vértice

altura

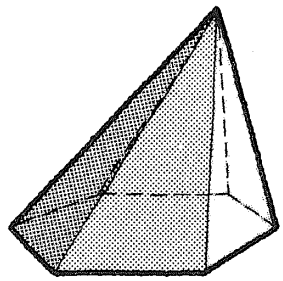
base

130

Señalar la opción correcta.

Una pirámide

**es/no es** un poliedro.



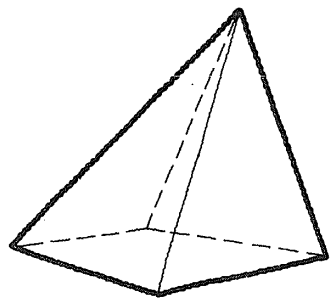
es

131

Señalar la opción correcta.

Una pirámide como la representada

**es/no es** un poliedro regular.

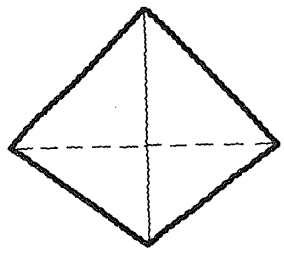


no es

132

El **tetraedro** regular convexo que hemos definido anteriormente

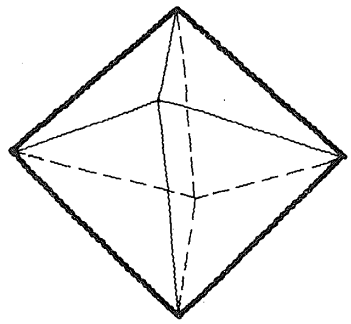
**es/no es** una pirámide.



es

133

El **octaedro regular convexo**
¿es una pirámide?



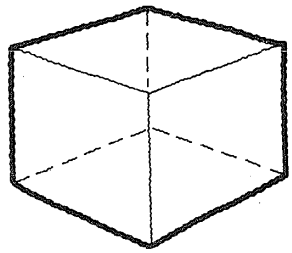
Sí/No

No

134

El **hexaedro regular convexo o cubo**

¿es una pirámide?



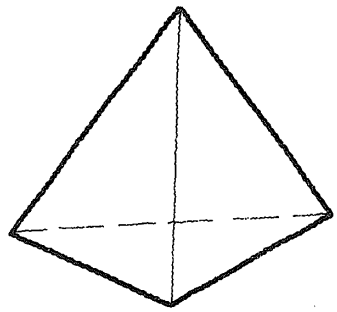
Sí/No

No

135

Si la base
es una región triangular
la pirámide se denominará

**pirámide de base triangular.**

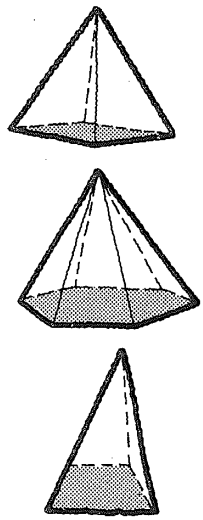


136

Si
la base es una región cuadrada,
ésta es una [_____].

Si la base es una región hexagonal regular convexa,
ésta es una: [_____].

Si la base es una región trapecial,
ésta es una: [_____],
etcétera.



pirámide de base cuadrada

pirámide de base hexagonal regular convexa

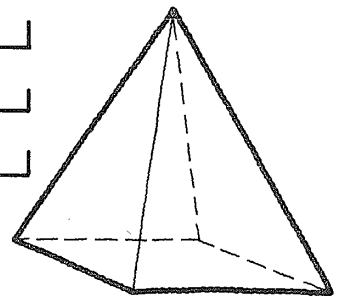
pirámide de base trapecial

137

¿Cuántos **ángulos diedros** tiene la pirámide representada? [___]

¿Cuántos **ángulos poliedros?** [___]

¿Cuántos **ángulos triedros?** [___]



8

5

4

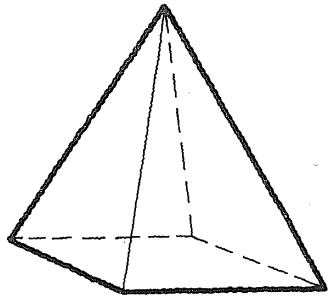
138

La pirámide representada tiene.

[___]aristas,

[___]caras,

[___]vértices.



8

5

5

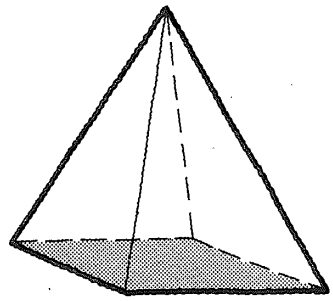
139

De las 5 caras que hemos identificado
a la sombreada le hemos dado
el nombre de:

└___┘,

y a las otras 4
las llamaremos

**caras laterales.**



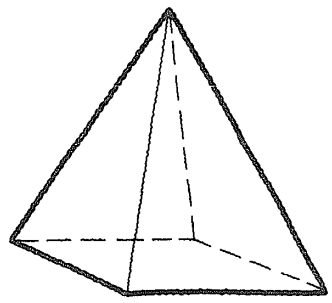
base

140

Es una pirámide cualquiera,
las caras laterales
son:

└_____┘,
y
la base
es

**cualquier región poligonal.**



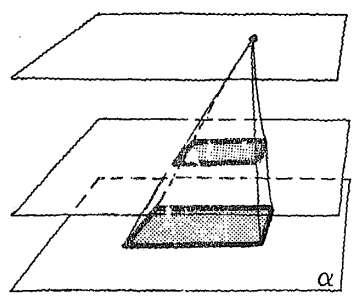
regiones triangulares

141

Debemos observar que
la **sección transversal "horizontal"**
de una pirámide
puede ser:

**una región poligonal**
**semejante a la base**
o:

└_____┘.




un punto

4.8.3.1

Práctica adicional
de
identificación de los elementos de un cono
o de una pirámide,
si
se considera necesario.

4.8.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *definir* un cono, una pirámide, un cono circular y un cono circular recto;
- *identificar* los elementos de un cono y de una pirámide.

8.4

Cilindros y prismas

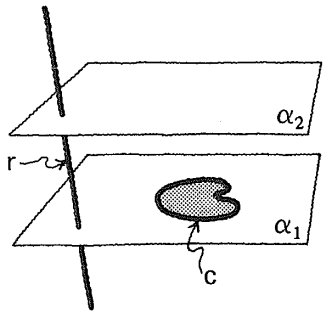
142

Consideremos, ahora:
dos planos ($\alpha_1$ y $\alpha_2$) paralelos;

la región determinada por una curva cerrada simple (c) contenida en $\alpha_1$,

y

una recta (r) que interseca a los dos planos.

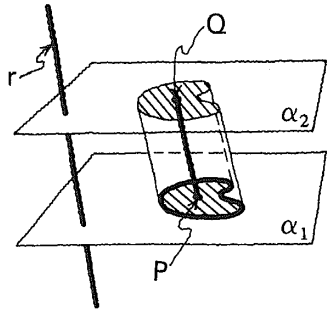



143

El conjunto de todos los segmentos de recta $\overline{PQ}$ tales que,

$P \in \alpha_1$, $Q \in \alpha_2$
y
$\overleftrightarrow{PQ} \parallel r$
constituye un cuerpo geométrico que llamaremos

**cilindro.**

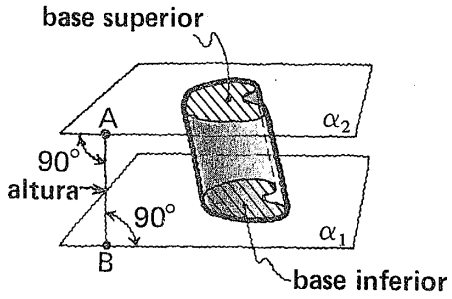


144

Nomenclatura:

**altura**

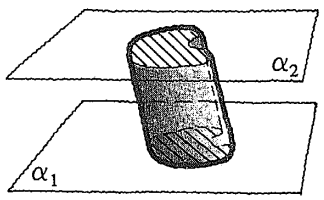
es la distancia
entre los dos planos
($\alpha_1$ y $\alpha_2$ que
contienen a las **bases.**




145

Señalar la opción correcta.

Podemos,
aceptar intuitivamente
que
las dos bases de un cilindro
son:




congruentes

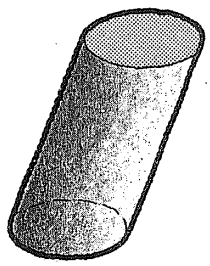
semejantes/congruentes/semejantes no congruentes/no semejantes/

146

Si las dos bases de un cilindro
son círculos
se define un:

[_____],

en forma análoga
a lo que ocurre
con un cono.

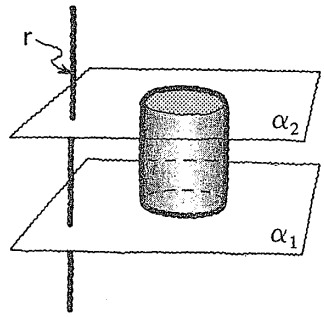


cilindro circular

147

Si las bases son círculos y
$r \perp \alpha_1 \wedge r \perp \alpha_2$

El cuerpo geométrico recibe el nombre de:




cilindro circular recto

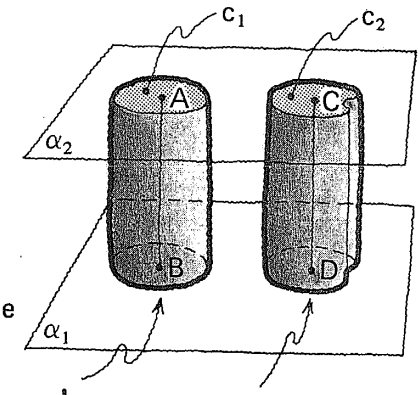
148

Si

$\overleftrightarrow{AB} \perp \alpha_1$ y $\overleftrightarrow{AB} \perp \alpha_2$

$\overleftrightarrow{CD} \perp \alpha_1$ y $\overleftrightarrow{CD} \perp \alpha_2$

$c_1$ es un círculo
y
$c_2$ es una región limitada por una curva cerrada simple cualquiera,




éste es un:

y éste es un:

cono circular recto

cono recto

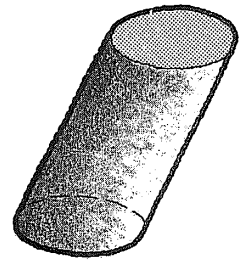
149

Un **cilindro hueco** o **superficie total del cilindro** estaría constituido por:

,

y

.



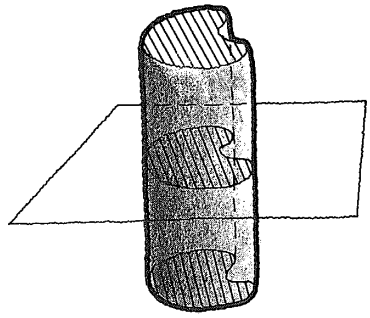
las dos bases

la superficie lateral

150

Una sección transversal "horizontal" de un cilindro (sólido) será:

└_____┘.



Una sección transversal "horizontal" de un cilindro (hueco) será:

└_____┘.

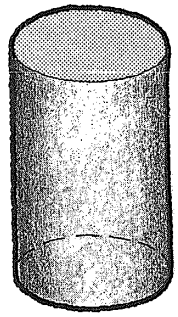
una región limitada por una curva cerrada simple congruente a las bases

una curva cerrada simple congruente con las que limitan las bases, o una de las bases

151

Una sección transversal "horizontal" de un cilindro circular (sólido) será:

└_____┘.



Una sección transversal "horizontal" de un cilindro circular (hueco) será:

└_____┘.

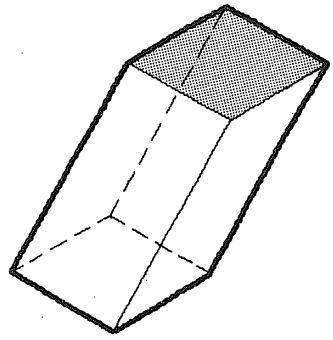
un círculo

congruente con las que limitan las bases, o una de las bases

152

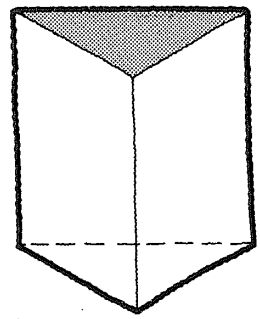
Si las bases de un cilindro son regiones poligonales el cuerpo geométrico recibe el nombre de:

**prisma.**



153

Por ejemplo,
si
las bases
son
regiones triangulares,
el
prisma se
denominará:



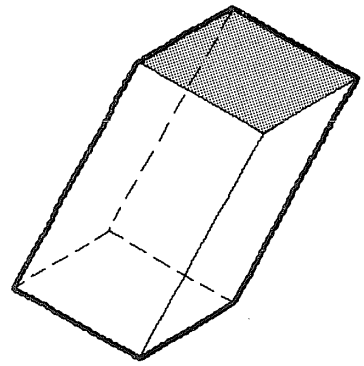
└_____┘.

prisma de base triangular
o prisma triangular

154

Si
las bases de un prisma
son
paralelogramos
el sólido recibe el nombre
de

**paralelepípedo.**



155

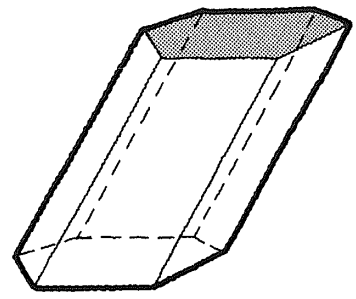
Las **bases** de un prisma
son

**regiones poligonales cualesquiera**

sus **caras laterales**

son:

└_____┘.

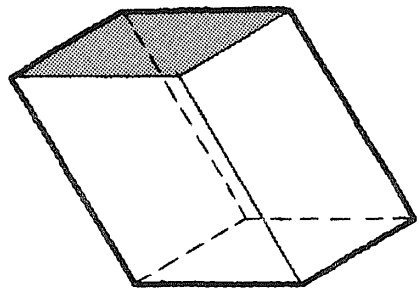


regiones limitadas por
paralelogramos

156

Entonces,
en un
paralelepípedo
todas las caras
son:

_____.

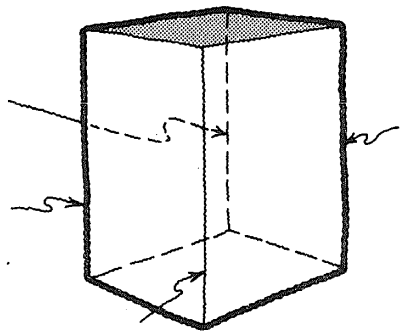


regiones limitadas por
paralelogramos

157

Si las "aristas laterales
son
perpendiculares
a los planos
que
contienen a las bases
se define
un

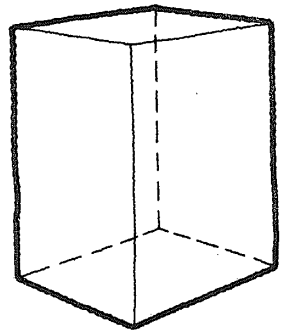
**prisma recto.**



158

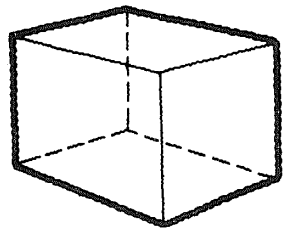
Un prisma recto de base
rectangular
recibe el nombre de

**paralelepípedo rectangular**



159

Si todas las caras de un paralelepípedo rectangular son congruentes estamos hablando de un:



└_____┘

cubo o hexaedro regular convexo

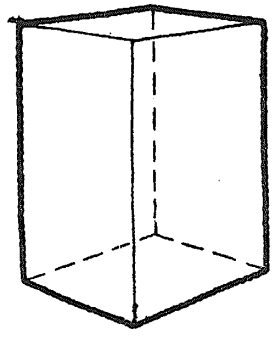
160

Entonces,
los prismas son también

**poliedros.**

161

Por ejemplo,
el paralelepípedo rectangular representado
tiene:



└__┘ángulos diedros, 12

└__┘ángulos poliedros, 8

└__┘ángulos triedros. 8

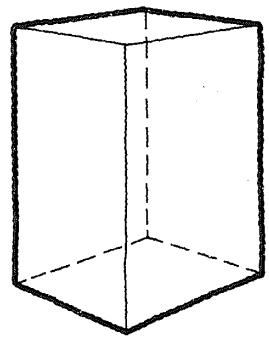
162

Esta es la representación
de un poliedro de 6 caras,
que es un prisma recto
de base rectangular,
también llamado:

└_____┘.

y tiene:

└__┘aristas,
y
└__┘vértices



paralelepípedo rectangular

12

8

**4.8.4.1**

Práctica adicional
de
identificación de los elementos
de un
cilindro o un prisma dado,
si se
considera necesario.

163

Completemos, ahora,
la tabla siguiente:

**Pirámides**

| *Base* | *Núm. de caras* | *Núm. de aristas* | *Núm. de vértices* |
|---|---|---|---|
| Triangular | | | |
| Cuadrangular | | | |
| Pentagonal | | | |
| Hexagonal | | | |
| | | | |
| n – gonal | | | |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 6 | 4 |
| 5 | 8 | 5 |
| 6 | 10 | 6 |
| 7 | 12 | 7 |
| | | |
| n + 1 | 2n | n + 1 |

164

Intentemos
encontrar
una relación entre
el número de caras,
el número de aristas,
y
el número de vértices
de
una pirámide.

165

Completemos la tabla:

**Prismas**

| *Base* | *Núm. de caras* | *Núm. de aristas* | *Núm. de vértices* |
|---|---|---|---|
| Triangular | | | |
| Cuadrangular | | | |
| Pentagonal | | | |
| Hexagonal | | | |
| | | | |
| n — gonal | | | |

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 9 | 6 |
| 6 | 12 | 8 |
| 7 | 15 | 10 |
| 8 | 18 | 12 |
| | | |
| n + 2 | 3n | 2n |

166

Intentemos
encontrar
una relación
entre
el número de caras,
el número de aristas,
y
el número de vértices
de un
prisma

167

Completemos la tabla:

**Poliedros regulares convexos**

| *Nombre* | *Núm. de caras* | *Núm. de aristas* | *Núm. de vértices* |
|---|---|---|---|
| Tetraedro | | | |
| Hexaedro | | | |
| Octaedro | | | |
| Dodecaedro | | | |
| Icosaedro | | | |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 6 | 4 |
| 6 | 12 | 8 |
| 8 | 12 | 6 |
| 12 | 30 | 20 |
| 20 | 30 | 12 |

168

Intentemos
encontrar
una
relación
entre
el número de caras,
el número de aristas,
y
el número de vértices
de un
poliedro regular convexo.

169

La expresión C + V = A + 2
que se conoce con el nombre de

**fórmula de Euler**

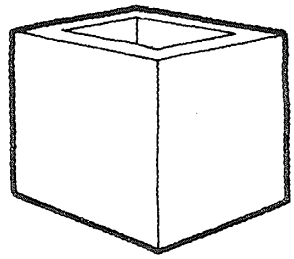
relaciona
el número de caras (C)
el número de vértices (V)
y
el número de aristas (A)
de cualquier

**poliedro simple.***

*Poliedro simple es el que no tiene huecos o agujeros en su superficie.

Todos los poliedros que hemos estudiado son
simples.
Esta sería la representación de un

**poliedro no simple.**



4.8.4.2

Práctica de determinación del

número de caras,

número de vértices
o
número de aristas

de un poliedro dado,
mediante la aplicación de la fórmula de Euler
si se considera necesario

4.8.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *definir* un cilindro, un prisma, un cilindro recto, un cilindro circular recto, un prisma recto, un paralelepípedo, un paralelepípedo rectangular y un cubo;
- *identificar* los elementos de un cilindro o un prisma;
- *aplicar* la fórmula de Euler para la determinación del número de aristas o vértices de un poliedro dado.

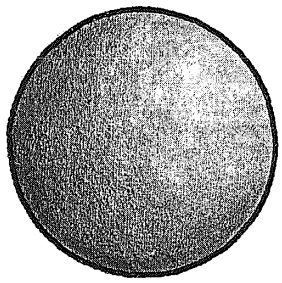
8.5

Esfera

171

Otro cuerpo geométrico:

la **esfera.**



172

Podemos hablar
de

**esfera hueca** o **superficie esférica,**

y de

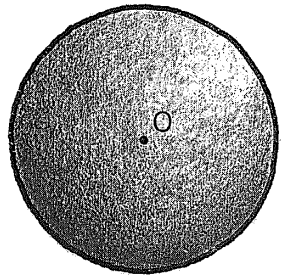
**esfera sólida.**

173

La **esfera hueca**
o
**superficie esférica**

es
el conjunto de puntos en
el espacio que equidistan
de un punto fijo llamado

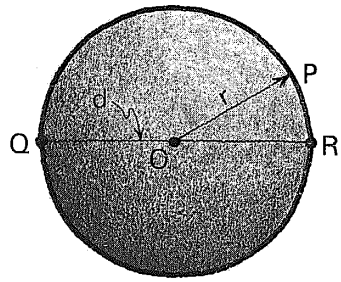
**centro** (O)




174

**Radio** de la esfera

es el segmento $\overline{OP}$,
tal que O es el centro
y
P un punto cualquiera de la
esfera hueca.




**Diámetro** de la esfera
es el segmento $\overline{QR}$,
que contiene al centro
y
a dos puntos (Q y R) de la esfera hueca.
También llamamos radio y diámetro a las medidas
de los segmentos mencionados.

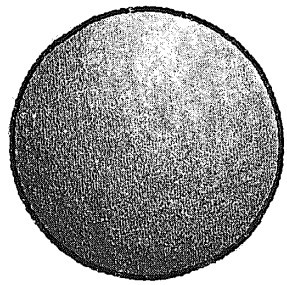
175

La sección transversal
de una esfera sólida
es:

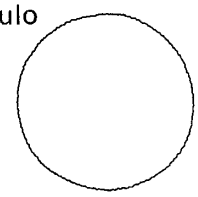
_____.

La sección transversal
de una esfera hueca
es:

_____.



un punto
o un círculo

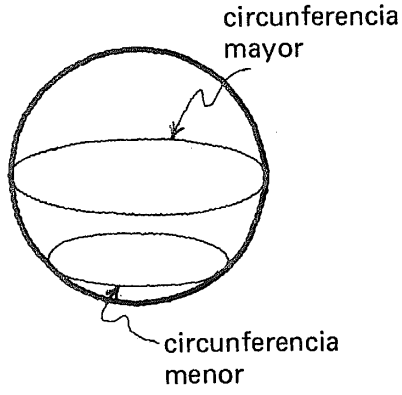


un punto
o una circunferencia

Si la sección transversal
contiene al centro de la esfera
se llama

**circunferencia mayor**
o
**círculo mayor**

según se trate
de una esfera hueca o sólida
respectivamente.




4.8.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

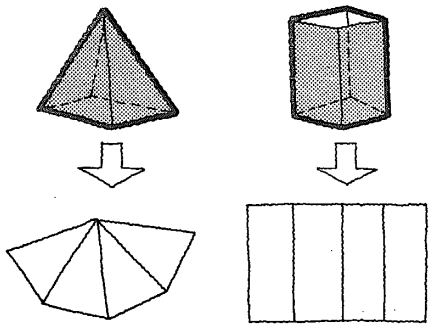
- *definir* una esfera sólida y una esfera hueca.

8.6

# Área lateral, área total y volumen

177

La **superficie lateral** de un prisma o de una pirámide es la unión de las caras laterales.



Llamaremos

**área lateral**

a la medida de esta superficie lateral.

178

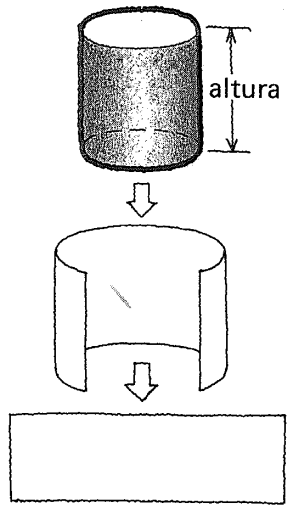
Atención.

El área lateral de un cilindro recto será igual al producto de:

[ ]

y [ ]

como podemos ver en la figura adjunta.




el perímetro de cualquiera de las bases

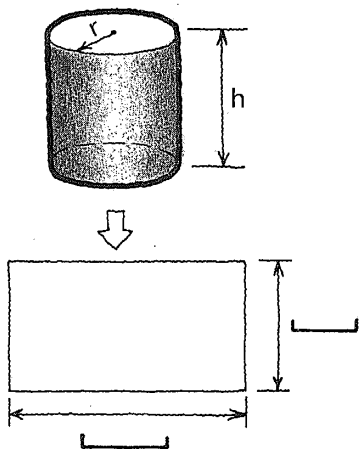
la altura

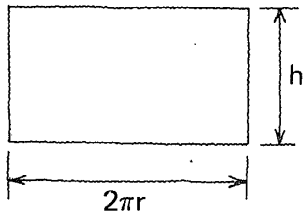
179

Para un cilindro circular recto, de radio r y altura h.

Área lateral:

$A_L =$ ____




$2\ \pi\ rh$

180

Atención.

Para un **cono circular recto:**

área lateral = área sector circular S

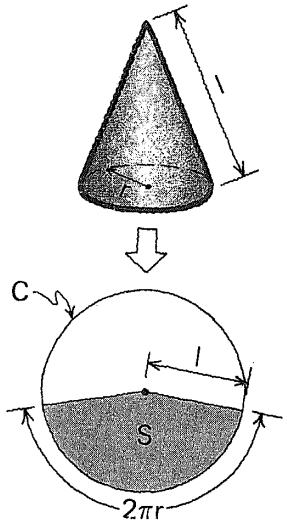
área del círculo $C = \pi l^2$

área del sector $S = \frac{2\pi r}{2\pi l}\ \pi l^2$

$S = \pi rl$

Entonces:

$A_L = \pi rl$




181

El área total de un cilindro o de un cono será la suma del área lateral y el área de la base o de las bases.

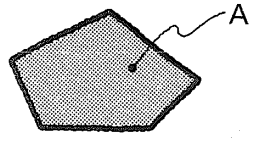
**4.8.6.1**

Práctica de
determinación de áreas laterales o totales
de conos no piramidales, cilindros no prismáticos,
pirámides y prismas.

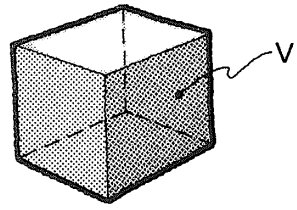
182

Ahora bien,
así como hemos asociado
a cada segmento de recta
un número real no negativo
que es la **longitud** del segmento. . .

y. . .
así como hemos asociado
a cada región de un plano
un número real no negativo
que es su **área**. . .



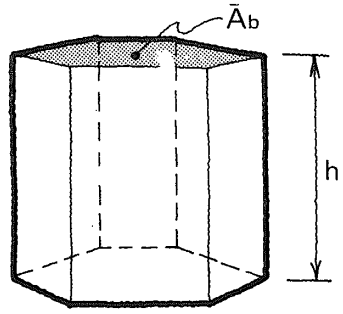

. . . asociaremos ahora
a cada cuerpo geométrico
un número real no negativo
que es su **volumen.**




183

Definiremos
el volumen de un prisma
recto
como
el producto del área de la base
y la altura.

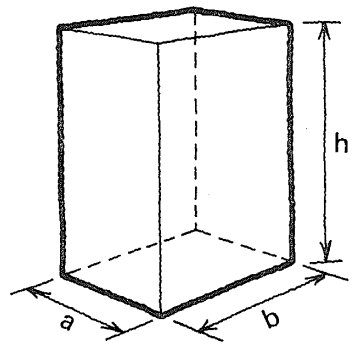
$V = A_b h$



184

Volumen de un paralelepípedo rectangular.

$V = \square$

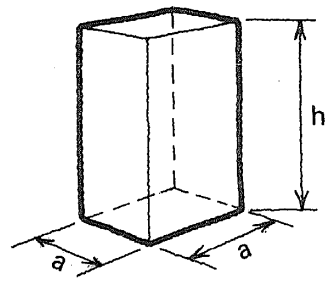



abh

185

Volumen de un prisma recto de base cuadrada.

$V = \square$

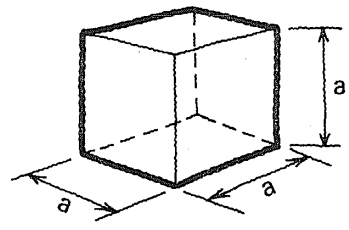



$a^2 h$

186

Volumen de un cubo o hexaedro regular.

$V = \square$

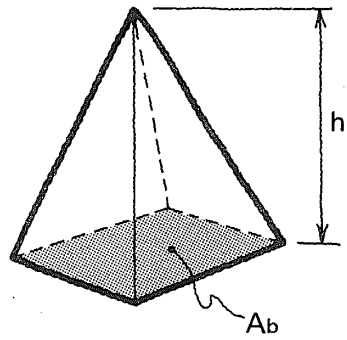



$a^3$

187

Puede demostrarse
que
el volumen de una pirámide
es igual a
un tercio del área de la base
y la altura.

$$V = \frac{A_b\ h}{3}$$




188

En los cuadros siguientes
podemos encontrar
algunas fórmulas*
para calcular:

- áreas laterales,
- áreas totales,
  y
- volúmenes

de algunos cuerpos geométricos.

*Las fórmulas presentadas pueden deducirse, como ejercicio, si se considera necesario.

189

**Prisma recto.**

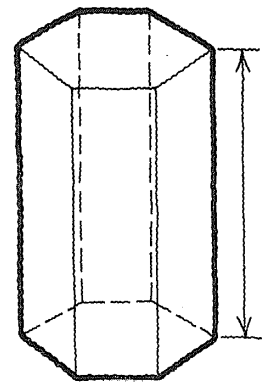
- *Área lateral*

  $A_L$ = perímetro de la base por la altura.

- *Área total*

  $A_T$ = área lateral + 2 X área de la base

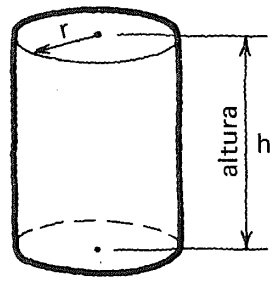
- *Volumen* = área de la base por la altura.



190

**Cilindro circular recto.**

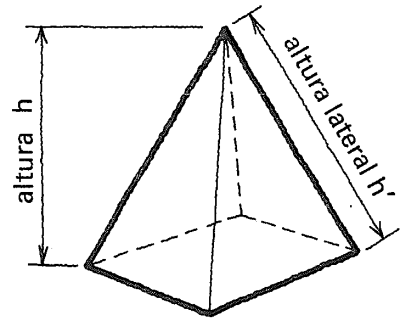
- $A_L = 2\pi rh$
- $A_{BASE} = \pi r^2$
- $A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$
- Volumen $= \pi r^2 h$




191

**Pirámide recta.**

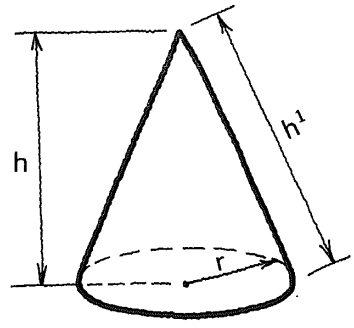
- $A_L$ = semiperímetro de la base por la altura lateral (h')
- $A_T = A_L + A_{BASE}$
- Volumen $= \frac{1}{3} A_{BASE} \times h$




192

**Cono circular recto.**

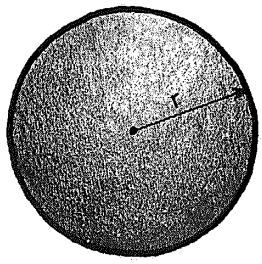
- $A_L = \pi rh'$
- $A_{BASE} = \pi r^2$
- $A_T = \pi rh' + \pi r^2 = \pi r\,(h' + r)$
- Volumen $= \frac{\pi r^2 h}{3}$



193

**Esfera.**

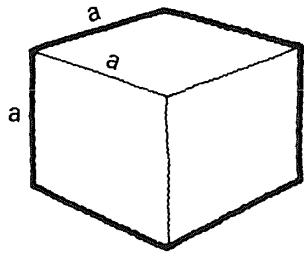
- $A = 4\pi r^2$
- Volumen $= \dfrac{4\pi r^3}{3}$




194

**Cubo.**

- $A_T = 6a^2$
- Volumen $= a^3$




**4.8.6.2**

Práctica
de
determinación de

áreas laterales,

áreas totales,
y
volúmenes

de conos, cilindros y esferas.

4.8.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *calcular* el área lateral, el área de las bases y el área total de los siguientes cuerpos geométricos: 1) cono no piramidal 2) cilindro no prismático, 3) pirámide, y 4) prisma;
- *calcular* el volumen de los cuerpos geométricos enumerados arriba;
- *calcular* el área y el volumen de una esfera.

195

Enunciaremos, en los cuadros siguientes, una importante proposición llamada:

**principio de Cavalieri,**

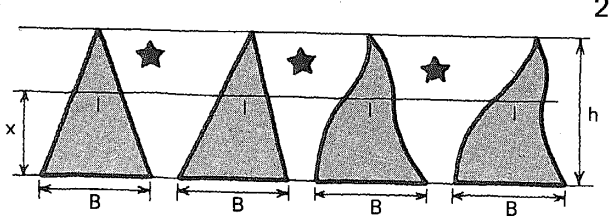
que es un valioso auxiliar para el cálculo de áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos geométricos.

196

Si dos figuras planas tienen, en cualquier altura intermedia (x) secciones de la misma longitud (l), entonces, tienen la misma área.

Por ejemplo:

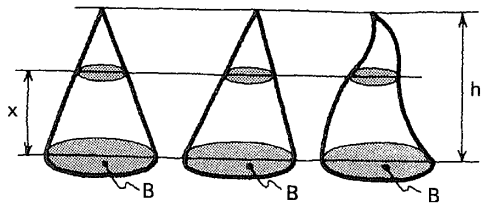
Si las figuras mostradas cumplen con la condición señalada, cualquiera de ellas tiene un área igual a $\frac{Bh}{2}$.



Si dos cuerpos geométricos tienen, en cualquier altura intermedia, secciones con la misma área, entonces tienen el mismo volumen.

Por ejemplo:

Si los cuerpos geométricos de la figura cumplen con la condición señalada, el volumen de cualquiera de ellos es igual a $\frac{Bh}{3}$, en que B es el área de la base y h la altura.



*Esta obra se terminó de imprimir*
*el día 10 de mayo de 1984,*
*en los talleres de Impresora Lorenzana, S. A.,*
*Cafetal núm. 661, Col. Granjas México,*
*se encuadernó en Servicios Editoriales Profesionales, S. A.,*
*Av. 5 de Mayo núm. 495, Col. Merced Gómez,*
*Deleg. Álvaro Obregón, 01600, México, D. F.,*
*se tiraron*
*3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición*

CO EV KC 100